経済変動の動学的確率的一般均衡モデル (1)
- Python/Scipy によるカリブレーション -

増山　幸一
明治学院大学経済学部

2011 年 4 月: preliminary version

1　始めに

近年、動学的確率的一般均衡モデル (Dynamic Stochastic General Equilibrium model: DSGE モデル) のカリブレーションに基づいて 現実経済の動的変動を説明しようとする研究が急進展してきた。米国の連邦準備銀行を含むいくつかの中央銀行では、DSGE モデルを活用して実際の政策策定に役立たせる試みもなされている。[*1]

DSGE モデルは、Kydland and Prescott(1982) や Hansen(1985) などの研究で代表される実物的景気循環モデル（Real Business Cycle Models) を基礎としている。また、DSGE モデルの数学的手法は動的計画法と呼ばれる最適化手法に大きく依存している。動的計画法を用いた経済モデルの構築は Sargent(1987)、Stokey and Lucas(1989)、Ljungqvist and Sargent(2004) などで詳細に説明されている。

近年、新ケインズ派の経済学者たちは、実物的景気循環モデルに市場の失敗や名目変数の硬直性を導入した DSGE モデルを用いて、経済変動の要因分析や経済政策の効果を分析するようになった。代表的な研究として、Galí, Gertler and Lopez-Salido(2001)、Woodford(2003)、Dotsey and King(2005)、Christiano, Eichenbaum and Evans(2005)、Smets and Wouters(2007)、Gertler and Leahy(2008) などがある。DSGE モデルを用いて金融政策の効果等を分析した研究として、Carlstrom and Fuerst(1997) や Gertler, Gilchrist and Natalucci(2007) 等がある。マクロ経済動学や金融論における研究の最先端フロンティアでは、DSGE モデルを自由自在に活用することが不可欠となってきた。

DSGE モデルのカリブレーションの計算では、従来、商業ソフトである MATLAB などが主として活用されてきた。例えば、Ljungqvist and Sargent(2004)、McCandless(2008)、Walsh(2010) などの大学院生向けテキストでは、MATLAB のコードで書かれたプログラムを用いて計算されたカリブレーション結果が示されている。さらに、使用された MATLAB プログラム・ファイルがホームページ上で公開されていて、誰でも自由に活用できるようになっている。また、DSGE モデルのカリブレーションの計算で必要不可欠な非線形モデルの線形化を自動的に処理してくれるソフトである Dynare が、フランスの研究機関 (CEPREMAP) で開発されている。このソフトを用いれば、経済モデルの線形化計算が自動的に処理され、MATLAB 上で線形化した

[*1] 米国連銀モデルについては Edge, et al.(2008) が、EU の ECB モデルについては Smets and Woutes(2002) が代表的な DSGE モデルである。

モデルを自動的にカリブレーションできる。しかし、商業用ソフトは維持費が高価なこともあり、最近では、MATLAB と代替可能なフリー・ソフトである GNU Octave が活用されている。[*2]

近年、汎用のオブジェクト指向プログラミング言語としての Python が急速に浸透して、プログラム開発に密接に関連する IT 産業をはじめ、大学や研究機関の多くの分野で活用されるようになってきた。[*3] 米国の幾つかの大学では、コンピュータ科学の初級者向け授業で多用されるようにきた。例えば、MIT では、コンピュータ科学入門の授業で Python によるプログラミングが教授されている。Python は非常にシンプルなオブジェクト指向プログラミング言語で、Python 上で動作する極めて多種類、広範囲の応用パッケージが存在していて、非常に多数のオープン・ソースのフリー・ソフトからなる標準ライブラリを活用できるようになっている。科学計算用の Scipy と呼ばれる数値計算ライブラリーを用いれば、MATLAB を用いて行った計算も容易に可能となる。言語としてのシンプルさから、Stachurski(2009) は経済動学分析における数値計算に Python/Scipy を活用することを提唱している。

本稿は、DSGE モデルを用いた経済モデルのカリブレーションを行うために必要な数学的手法を説明し、オブジェクト指向プログラミング言語 Python/Scipy 上で、それらの計算手法を実際に用いたカリブレーションを行うことを目的とする。第 2 節で、オブジェクト指向プログラミング言語 Python/Scipy を活用するために最低限要求されるプログラミングの方法を説明する。実際の例としてソロー・タイプの経済成長モデルを取り上げ、外的撹乱を伴う経済成長のシミュレーションを実行してみる。第 3 節で、DSGE モデルのカリブレーションに必要不可欠な対数線形化手法と連立差分方程式解法の手法を簡単に説明する。とりわけ、Uhlig によって提案された対数線形化の手法を詳細に説明する。第 4 節では、DSGE モデルの出発点となった Hansen モデルを取り上げて、Python プログラムを具体的にコード化し、カリブレーションを実行してみる。第 5 節以降で、幾つかの重要な金融モデルのカリブレーションを取り上げる。

2 Scipy/Numpy を用いたマトリックス計算

NumPy は Python 上で働く数値計算のためのソフト・パッケージで、基礎的線形代数、基礎的なフーリエ変換、乱数発生などをふくむ基本的な数学関数や計算処理の標準モジュールとなっている。SciPy は、NumPy の上に拡張された科学計算のための数学関数や計算アルゴリズムを収容した科学計算用の一般化標準モジュールである。SciPy は統計分析、最適化、数値計算、フーリエ変換、信号処理、画像処理、微分方程式の解法、等の計算に必要なモジュールを含んでいる。ここでは、これらの SciPy と NumPy がインストールされていることを前提とする。なお、計算結果をグラフに表示するようなグラフィック機能を使用するためには、matplotlib という site-package が必要なので、これもインストールされていることを前提とする。

Numpy のライブラリーに格納されている各種のモジュールを利用するためには、プログラムの始めに、以下のような文を記述しなければならない。

[*2] GNU Octave は MATLAB を代替することを目的に開発されたもので、数値計算に特化したソフトであって、以下で説明する Pyhon のような汎用のオブジェクト指向プログラミング言語ではない。GNU Octave の利用法については、増山著『経済変動の動学的確率的一般均衡モデル (2) - Octave/Dynare によるカリブレーション』を参考のこと。Dynare を GNU Octave 上で実行させるとき、モデルのカリブレーションの実行には何も問題は伴わないが、結果を示すグラフを EPS ファイルに出力する命令が正しく実行されない。

[*3] プログラミング言語として代表的なものを挙げると、Java、 Ruby、 Perl などである。この中で、最も予約語の数が少なく、最も文法が簡単なのが Python である。インターネット上で利用されるサーバやアプリケーション言語、例えば、Google App Engine, xen, MAYA, Zope 等のような応用に組み込み言語として利用されている。

>>> from numpy import *

この命令は numpy 内にあるすべてのモジュールを使用できる状態にする。アスタリスク*の代わりに module_name を記述すると、指定されたモジュールだけがインポートされる。NumPy に内蔵されている基本的なモジュールは、線形代数 (linalg)、確率分布 (random)、離散型フーリエ変換 (fft)、マトリックス変換などである。NumPy には、通常の数学的関数、例えば、三角関数、指数・対数関数、簡単な統計計算などが組み込まれていて、簡単に利用できる[*4]。例えば、$\sin(\pi/2)$ の計算は

>>> sin(pi/2)

とすれば、答えは 1.0 と返される。累乗計算、例えば、$z = 2.3^{5.1}$ は

>>> z = 2.3** 5.1

と記述する。指数関数は exp(..)、自然対数は log(..) という組込み関数を使用できる。

numpy の組み込み関数 array を使って、

>>> a =array([1,2,3,4])

と入力すると、4 つの数値が要素となっている配列データ (1,2,3,4) を内容とする変数 (オブジェクト) を定義することができる。よって、$(10, 20, 30, 40)$ という 1 次元ベクトル (横ベクトル) はリスト型変数 (オブジェクト)A として

>>> A = array([10,20,30,40])

と入力すれば良い。

>>> b=arange(4)

とすると、ゼロから始まる 4 未満の整数の配列 (0,1,2,3) からなるリスト型変数を定義できる。これは

>>> b= array([0,1,2,3])

とすることと同じである。等差数列を要素とする配列を作成することができる。定差 0.5 の等差数列 [0,0.5,1.,1.5,2.] という配列を作成するには、

>>> c = arange(0,2,0.5)

と入力すればよい。また、数直線 $[0, 1.]$ を等間隔に 10 分割した数値からなる配列は

>>> c=linspace(0,1.,10)

と入力すればよい。また、ゼロを初項とする整数からなるリストを作成したいときは、組込み関数 range を使うこともできる。

>>> seq = range(10)

とおくと、

seq =[0,1,2,3,4,5,6,7,8,9]

となる。

行列計算に必要な組込み関数および操作方法について説明する。行列の積などの計算をするためには、数値をマトリックスの形式で表現する必要がある。Scipy/Numpy では、n 次元配列表現 (ndarray) と呼ばれる、一般的な配列表現 (リスト型変数) を採用している。マトリックス配列 (2 次元配列) はそのスペシャル・ケースになる。2×2 行列を定義したいとき、例えば、

[*4] 組込み関数として、三角関数関係では、sin(), cos(), tan(), arcsin(), arccos(), arctan(), sinh(), cosh(), tanh() など、対数、指数関数関係では、exp(), log(), log10(), 等が使用できる。

>>> B = array([[1., 1.],[0., 1.]])

>>> C= array([[2.,0.],[3.,4.]])

とすればよい。ちなみに、行列 B、C は

$$B = \begin{bmatrix} 1. & 1. \\ 0. & 1. \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 2. & 0 \\ 3. & 4. \end{bmatrix}$$

となっている。配列を作成する組込み関数は、array、range、arange、linspace に止まらない。以下のような組込み関数が用意されている。

>>> D = zeros((3,4))

>>> E = ones((3,4))

>>> F = eye(4)

>>> G = diag(a)

>>> H = empty((3,4))

zeros((n,m)) はすべての要素をゼロとする n 行 m 列の行列を作成し、ones((n,m)) はすべての要素と 1 とする n 行 m 列の行列を作成、eye(n) は n 行 n 列の単位行列を作成する。これらはすべて浮動小数点の数値で与えられる。さらに、各変数 ndarray に対して、ndarray.ndim、 ndarray.shape、 ndarray.size、 ndarray.dtype などのような操作をすることができる。

>>> D.ndim

と入力すると、配列 A の次数を返すので、2 と画面に表示される。

>>> E.shape

は各次数の要素の数を返すので、(3,4) と表示される。

n 次元配列表現では、加算、引き算、乗除の操作は必ず配列の要素ごとの計算になる。だから、行列の和と差の計算は、数値の加算、減算と同じように問題なく計算できる。例えば、

>>> B + C

と計算できる。この答えは、

$$\begin{bmatrix} 3. & 1. \\ 3. & 5. \end{bmatrix}$$

となる。注意が必要なのは、行列の積を計算するときである。例えば、

>>> B * C

と入力すると、答えは

$$\begin{bmatrix} 2. & 0. \\ 0. & 4. \end{bmatrix}$$

というように、要素ごとの積になる。通常の行列の積を計算するためには、dot(A,B) と組込み関数を用いて入力する必要がある。

>>> dot(B,C)

別の例として、例えば、

>>> D = array([[1., 2., 3.],[5., 6., 7.]])

>>> E = array([[1., 2., 3.],[5., 6., 7.],[1.,2.,3.]])

と入力する。D, E は以下の行列として定義されている。

$$D = \begin{bmatrix} 1. & 2. & 3. \\ 5. & 6. & 7. \end{bmatrix} \quad E = \begin{bmatrix} 1. & 2. & 3. \\ 5. & 6. & 7. \\ 1. & 2. & 3. \end{bmatrix}.$$

行列 D と行列 E の積を計算するために

>>> F=dot(D,E)

と入力する。この結果、

$$F = \begin{bmatrix} 14. & 20. & 26. \\ 42. & 60. & 78. \end{bmatrix}$$

と正しく計算できていることが分かる。行列 A の転置は　A.transpose() または A.T で実行できる。ちなみに、行列 B の転置を計算するときは

>>> B.T

と入力すると、転置された行列

$$\begin{bmatrix} 1. & 0. \\ 1. & 1. \end{bmatrix}$$

が返される。この命令は 2 次元以上の配列には有効であるが、1 次元配列には無効である。Python では、1 次元配列は必ず横ベクトルの形式 (リスト型変数) で取り扱うことになっている。だから、横ベクトルを縦ベクトルに変更することはできない。1 次元配列の転置を実行するためには、以下のようなマトリックス形式で計算することを行わなければいけない。

MATLAB/Octave と同じようにマトリックス配列の方法で行列計算を実行することもできる。例えば、dot(A,B) の形式ではなく、

>>> mat(B)*mat(C)

>>> mat(D)*mat(E)

のように、n 次元配列表現 (ndarray) をマトリックス表現に変更した上で、MATLAB(Octave) と同じ手続きで、行列の積を計算することができる。ここで、mat(B) という表現は B を n 次元配列表現 (ndarray) ではなく、マトリックス形式に変更する組込み関数である。また、最初からマトリックス形式で変数を定義することもできる。

>>> D = mat([[1., 2., 3.],[5., 6., 7.]])

>>> E = mat([[1., 2., 3.],[5., 6., 7.],[1.,2.,3.]])

とすると、D と E はマトリックスとして取り扱われる。この場合

>>> D*E

と置けば、マトリックスの積が計算できる。縦ベクトルは

>>> A = mat([[1],[2],[3]])

のように定義する。横ベクトルは

>>> B = mat([[1,2,3]])

と入力する。なお、mat(...) は matrix(...) という組込み関数の短縮形表現である。

>>> A.T

とすると、A の転置行列、つまり横ベクトルが表示される。

numpy 内のモジュール linalg には、逆行列や固有値を計算する線形代数に関わる様々な命令が組み込まれている。例えば、linalg モジュールを用いて、E の固有値を求めるためには、

>>> linalg.eig(E)

と入力すると、固有値と固有ベクトルを返してくれる。ここで、eig は固有値を計算させる命令である。また、E の逆行列を求めたいときは、

>>> linalg.inv(E)

とすればよい。計算命令の大部分は、module_name.function_name(A,[B]) 等の形式で表現する。$Ax = b$ という線形連立方程式の解を求めるときは、

>>> linalg.solve(A,b)

と書く[*5]。ここでは、linalg が module_name で、eig、inv および solve が function_name となっている。Numpy の線形代数モジュールですべて線形代数計算を賄うことはできない。例えば、、Numpy のモジュールでは、一般化固有値問題を計算できないので、Scipy のモジュールを使用しなければいけない。このようなときは scipy をインポートしておく必要がある[*6]。

matplotlib.pyplot は MATLAB/Octave と同じグラフィック機能を持っているモジュールである。このグラフィック機能を使用できる状態にしておくためには、matplotlib.pyplot をインポートする必要がある。例えば、

```
>>> import matplotlib.pyplot as plt
```

と入力すれば、plt という略称名の下で matplotlib に組み込まれている様々なグラフィック機能の命令が利用できる。言い換えると、matplotlib.pyplot というモジュール名の代わりに plt というモジュール名を用いることを宣言している。

ここで、Python/Scipy を用いた経済モデルのシミュレーションの例を取り上げる。ソロータイプの経済成長モデルを考えよう。生産関数は

$$Y_t = A_t F(K_t, H_t),$$

で与えられる。ここで、Y_t は時刻 t における経済全体の総生産量、A_t は時刻 t での生産技術水準、K_t は時刻 t での資本ストック、H_t は生産に投入された労働量を表現する。生産関数は一次同次であると仮定する。総生産量を労働者一人当たりに変換すると、

$$y_t = \frac{Y_t}{H_t} = A_t F(\frac{K_t}{H_t}, \frac{H_t}{H_t}) = A_t F(k_t, 1) \equiv A_t f(k_t),$$

となる。ここで、k_t は一人当たり資本ストックである。労働力が一定の成長率 n で拡大すると仮定するなら

[*5] 詳しくは、http://docs.scipy.org/doc/numpy にある NumPy のマニュアルを参照してください。

[*6] Scipy にも同様の線形代数計算のためのモジュールがあり、これを利用するときは、
>>> import scipy.linalg as splinalg
>>> invE = splinalg.inv(E)
として、異なるモジュール名をつける。同一のモジュール名を用いると混乱を引き起こす。

ば、$H_{t+1} = (1+n)H_t$ が成立する。また、資本ストックは蓄積方程式

$$K_{t+1} = (1-\delta)K_t + I_t$$

に従って成長する。δ は減価償却率、I_t は時刻 t での粗投資額である。この式から、一人当たり資本の蓄積は

$$k_{t+1} = \frac{(1-\delta)k_t + i_t}{1+n}$$

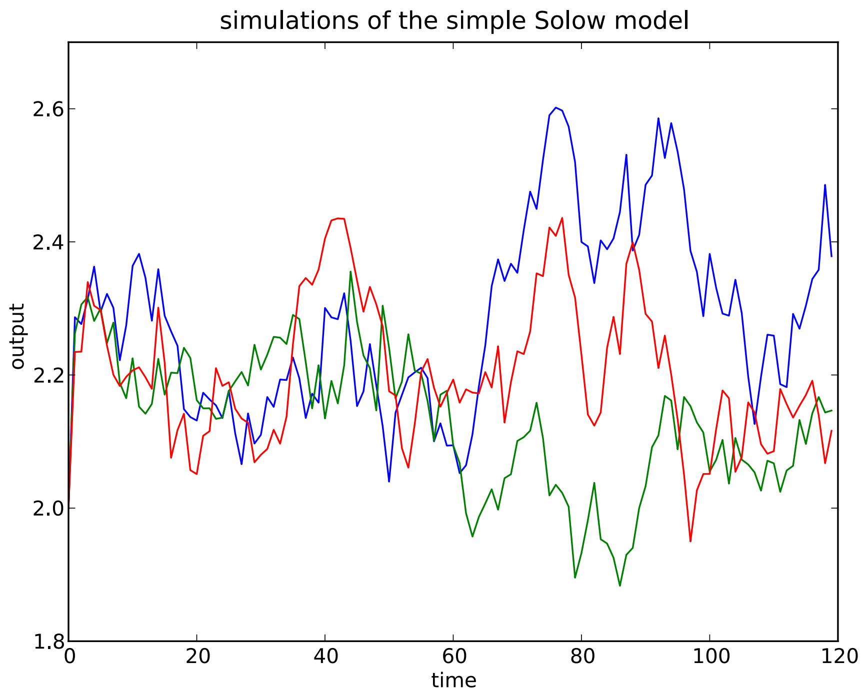
に従う。ここで、i_t は労働者一人当たり粗投資である。貯蓄が生産量の一定割合で行われると仮定できるとする。つまり、$s_t = \sigma y_t$ と仮定する。σ は労働者一人当たりの貯蓄率と理解される。$i_t = s_t$ を資本の蓄積方程式に代入すると、

$$k_{t+1} = \frac{(1-\delta)k_t + \sigma A_t f(k_t)}{1+n}$$

が得られる。
生産関数を $f(k_t) = k_t^\theta$ と簡単化する。生産技術へのショックは

$$A_t = \bar{A}e^{\epsilon_t}$$

で表現される。ここで、ϵ_t は平均値ゼロの正規分布に従う。このモデルをシミュレーションする。パラメータ値として、$\bar{A} = 1,\ n = 0.02,\ \delta = 0.1,\ \theta = 0.36,\ \sigma = 0.2$ を採用して、Python でシミュレーションした。



ソロー・モデルのシミュレーション

シミュレーション時間は 120 期間で、3 回実行されている。ϵ_t の標準偏差は 0.2 である。定常状態での生産量は 2.221 となっている。

3 Uhlig による対数線形化手法と線形モデルの解法

Uhlig(1999) が導入した対数線形化の方法を説明する[*7]。確率過程 X_t の対数線形化を考える。X_t の定常過程を $\bar{X}$ とするとき、

$$x_t = \ln X_t - \ln \bar{X}$$

と定義される x_t は X_t の定常過程 $\bar{X}$ からの対数乖離 (差分) の大きさを表す。表現を変えれば、

$$X_t = \bar{X}e^{x_t}$$

と書き直すことができる。e^{x_t} を原点 $x_t = 0$ の回りでテイラー級数展開すると、

$$X_t = \bar{X}[e^0 + x_t + \frac{1}{2}(x_t)^2 + \cdots] = \bar{X}(1 + x_t + \frac{x_t^2}{2} + \cdots)$$

が得られる。x_t が非常に小さい場合を想定しているので、通常、第 2 次以降の項は無視して、第 1 次の項まで で近似する。

$$X_t \approx \bar{X}(1 + x_t)$$

と表現できる。

$W_t = e^{aX_t}$ と表現される場合、

$$w_t = \ln W_t - \ln \bar{W} = a(X_t - \bar{X})$$

なので、$x_t = X_t - \bar{X}$, $\bar{W} = e^{a\bar{X}}$ とおくと

$$W_t = \bar{W}e^{ax_t} \approx \bar{W}[1 + ax_t]$$

となる。

$W_t = X_t(1 + aY_t)$ となっている場合、$X_t = \bar{X}e^{x_t}$, $Y_t = \bar{Y}e^{y_t}$ とおけば、

$$W_t = \bar{X}e^{x_t}(1 + a\bar{Y}e^{y_t}) = \bar{X}e^{x_t} + a\bar{X}\bar{Y}e^{x_t+y_t} \approx \bar{X}(1 + x_t) + a\bar{X}\bar{Y}(1 + x_t + y_t)$$

と近似される。さらに、

$$\frac{X_tY_t^\alpha}{Z_t^\beta}$$

を対数乖離変数を用いて線形近似すると、

$$\frac{X_tY_t^\alpha}{Z_t^\beta} = \frac{\bar{X}e^{x_t}\bar{Y}^\alpha e^{\alpha y_t}}{\bar{Z}^\beta e^{\beta z_t}} = \frac{\bar{X}\bar{Y}^\alpha}{\bar{Z}^\beta}e^{x_t+\alpha y_t-\beta z_t} \approx \frac{\bar{X}\bar{Y}^\alpha}{\bar{Z}^\beta}(1 + x_t + \alpha y_t - \beta z_t)$$

となる。ここで、$Z_t = \bar{Z}e^{z_t}$ と置いた。

[*7] Herald Uhlig, A toolkit for analysing nonlinear stochastic models easily, in *Computational Methods for Study of Dynamic Economies*, edited by Ramon Marion and Andrew Scott, 1999, Oxford University Presss.

例 3.1

コブダグラス型生産関数　$Y_t = \Lambda_t K_t^{\theta} H_t^{1-\theta}$ を考える。 ここで、$\Lambda_t = \bar{\Lambda} e^{\lambda_t}$, $\bar{\lambda} = 0$ とする。上記の対数線形化の手法を用いると、

$$\bar{Y}(1 + y_t) \approx \bar{\Lambda}\bar{K}^{\theta}\bar{H}^{1-\theta}[1 + \lambda_t + \theta k_t + (1-\theta)h_t]$$

となる。だから、生産量の変動は

$$y_t = \lambda_t + \theta k_t + (1-\theta)h_t$$

と表現できることになる。なお、$K_t = \bar{K}e^{k_t}$, $H_t = \bar{H}e^{h_t}$ と置いている。

対数線形化された動的経済システムは、x_t を (m 次元) 内生変数ベクトル、z_t を確率的外生変数ベクトルとして、一般的に以下のような形式で表現 できる。

$$E_t[Fx_{t+1} + Gx_t + Hx_{t-1} + Lz_{t+1} + Mz_t] = 0, \tag{1}$$

$$z_{t+1} = Nz_t + \epsilon_{t+1}, \tag{2}$$

ただし、E_t は時刻 t での条件付き期待値オペレータ、F, G, H, L, M, N は行列係数である。このシステムの解を、回帰的均衡則

$$x_t = Px_{t-1} + Qz_t$$

として求めることを考える。この表現を (1) に代入すると、

$$[(FP + G)P + H]x_{t-1} + [(FQ + L)N + (FP + G)Q + M]z_t = 0$$

が得られる。x_{t-1} の係数がゼロとなる条件から

$$FP^2 + GP + H = 0$$

が得られる。さらに、z_t の係数がゼロとなる条件から、Q は以下の条件を満たす行列として計算できる：

$$VQ = -\mathrm{vec}(LN + M), \tag{3}$$

$$V = N' \otimes F + I_m \otimes (FP + G), \tag{4}$$

ここで、N' は N の転置行列であり、$\otimes$ はクロネッカー積、vec(A) は行列 A を列ごとにタテベクトル化したベクトル、I_m は内生変数ベクトルの次元 (m) を持つ単位行列である。

回帰的均衡則の行列 P の固有値の絶対値が 1 よりも小さければ、このシステムは安定である。また、行列 V が逆行列を持つならば、行列 Q はユニークに定まる。Uhlig(1999) はこの回帰的均衡則の求め方をより容易にする方法を導入した。内生変数を以下のように 2 種類に分割する。x_t を内生状態変数 (m 次元ベクトル)、y_t をジャンプ変数 (n 次元ベクトル) とし、z_t を確率的外生変数 (k 次元) とするとき、経済モデルの均衡条件式を

$$Ax_t + Bx_{t-1} + Cy_t + Dz_t = 0, \tag{5}$$

$$E_t[Fx_{t+1} + Gx_t + Hx_{t-1} + Jy_{t+1} + Ky_t + Lz_{t+1} + Mz_t] = 0, \tag{6}$$

$$z_{t+1} = Nz_t + \epsilon_{t+1}, \tag{7}$$

と表現できると仮定する。ここで、C は $l \times n$ 行列 ($l \geq n$)、rank(F) $= n$、F は $(m + n - l) \times n$ 行列、N は安定な固有値のみを持つ行列とする。式 (5) は l 個の差分方程式から構成されている。

動学的経済モデルの解を以下のような動的な均衡則 (dynamic equilibrium law)

$$x_t = Px_{t-1} + Qz_t, \tag{8}$$
$$y_t = Rx_{t-1} + Sy_{t-1}, \tag{9}$$

として求めることを考える。Uhlig(1999) は $l = n$ の場合、以下の定理が成立することを証明した。

定理 3.1

$l = n$ とする。(5), (6), (7) で表現されている経済モデルの解が (8), (9) で表現される動学的回帰的均衡則として得られるならば、その係数行列は以下のように計算できる。

(1). P は *2* 次方程式

$$(F - JC^{-1}A)P^2 - (JC^{-1}B - G + KC^{-1}A)P - KC^{-1}B + H = 0 \tag{10}$$

を満たす。P の固有値の絶対値が *1* よりも小さいときにのみ、(8), (9) で記述されるシステムは安定である。

(2). R は

$$R = -C^{-1}(AP + B)$$

で与えられる。

(3). Q は

$$[N' \otimes (F - JC^{-1}A) + I_k \otimes (JR + FP + G - KC^{-1}A)]vec(Q) = vec[(JC^{-1}D - L)N + KC^{-1} - M] \tag{11}$$

を満たす。

(4). S は

$$S = -C^{-1}(AQ + D)$$

によって与えられる。

次に、P の 2 次方程式 (10) の解法について説明する。(10) 式の係数を

$$\Psi = F - JC^{-1}A, \tag{12}$$
$$\Gamma = JC^{-1}B - G + KC^{-1}A, \tag{13}$$
$$\Theta = KC^{-1}B - H \tag{14}$$

と置き換えると、行列 P の 2 次行列方程式が

$$\Psi P^2 - \Gamma P - \Theta = 0 \tag{15}$$

で与えられる。係数行列はすべて $m \times m$ 次元の行列である。このとき、(15) 式の解は $P = \Omega\Lambda\Omega^{-1}$ という形式で表現できることを説明する。ここで、行列 Λ は以下で導出する固有値を対角線上に持つ行列、Ω はそれに対応する固有ベクトルを列とする行列である。新しい $2m \times 2m$ 行列

$$\Xi = \begin{bmatrix} \Gamma & \Theta \\ I_m & 0_m \end{bmatrix} \tag{16}$$

$$\Delta = \begin{bmatrix} \Psi & 0_m \\ 0_m & I_m \end{bmatrix} \tag{17}$$

を定義する。ここで、I_m は次数 m の単位行列、0_m は次数 m のゼロ行列である。

定理 3.2

(1) Δ に関する Ξ の一般化固有値問題に対する固有ベクトルが s、対応する固有値が λ であるならば、固有ベクトル s は

$$s' = (\lambda x', x'),\ \text{for some}\, x \in R^m$$

なる表現形式をもつ。[*8] ここで、s' はベクトル s の転置ベクトルであり、$2m$ 次元ヨコ・ベクトルとなっている。

(2) この一般化固有値問題の解として、m 個の固有値 $\lambda_1,\ \lambda_2, ..., \lambda_m$ と対応する m 個の固有ベクトル $s_1' = (\lambda_1 x_1', x_1'),\ s_2' = (\lambda_2 x_2', x_2'),\ \ldots\ , s_m' = (\lambda_m x_m', x_m')$ が存在するならば、そして、これらの m 個の (固有) ベクトルは線形独立であるならば、$P = \Omega\Lambda\Omega^{-1}$ が 2 次方程式 (15) の解となる。$x_j' = (x_{j1}, x_{j2}, ..., x_{jm})',\ j = 1, 2, ..., m$ と表記する。ただし、

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \lambda_{m-1} & 0 \\ 0 & \ldots & \ldots & 0 & \lambda_m \end{bmatrix}$$

$$\Omega = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{21} & \cdots & x_{m-1,1} & x_{m,1} \\ x_{12} & x_{22} & \cdots & x_{m-1,2} & x_{m,2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ x_{1,m} & x_{2,m} & \cdots & x_{m-1,m} & x_{m,m} \end{bmatrix}$$

である。また、すべての固有値の絶対値が 1 よりも小さければ、経済システムの解は安定となる。

一般化固有値問題の固有値 λ は通常、$2m$ 個存在するので、$2m$ この固有値の中から m の固有値をどのように選択すべきかという問題が生じる。ここで、上記の $\Lambda,\ \Omega$ の求め方について説明する。一般化固有値問題の解は

$$\Xi x_j = \Delta x_j \lambda_j,\ j = 1, 2,\ ...,\ 2m$$

を満たす。この固有値問題に対する固有値は $2m$ 個存在するので、これらを $\lambda_j, j = 1, 2, ..., 2m$ と表記し、$x_j, j = 1, 2, ..., 2m$ はそれに対応する固有ベクトルである。ここで、重要な操作は、最初の m 個の固有値が安定であるように、固有値の順番を並び替えることである。このように並べ替えられた固有値に対応する固有ベクトルを列とする行列を行列 X と表記する。

$$X = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{21} & \cdots & x_{2m-1,1} & x_{2m,1} \\ x_{12} & x_{22} & \cdots & x_{2m-1,2} & x_{2m,2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ x_{1,2m} & x_{2,2m} & \cdots & x_{2m-1,2m} & x_{2m,2m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_{11} & X_{21} \\ X_{12} & X_{22} \end{bmatrix}$$

このとき、行列方程式 (15) の解は

$$P = X_{12}\Lambda X_{12}^{-1} \tag{18}$$

[*8] この一般化固有値問題の解は $\Xi w_j = \Delta w_j \lambda_j,\ j = 1, 2, \ldots, 2m$ を満たす $2m$ 個の固有値 λ_j と固有ベクトル w_j となる。固有ベクトルは次数 $2m \times 1$ のタテ・ベクトルとなる。$\Delta = I_{2m}$ のとき、通常の固有値問題になる。

で与えられることが知られている。ただし、Λ は安定な固有値 $\lambda_j, j = 1, 2, ..., m$ のみを対角要素とする行列

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \lambda_{m-1} & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \lambda_m \end{bmatrix}$$

であり、$\Omega \equiv X_{12}$ となっている。

定理 3.3

Δ と Ξ に関する *QZ* 分解 (一般化 *Schur* 分解)、つまり、

$$Y'\Sigma Z = \Delta$$
$$Y'\Phi Z = \Xi$$

を満たすユニタリー行列 Y , Z と上半三角行列 Σ, Φ を求めることができるとする。ただし、Z_{21} と Z_{22} は逆行列が存在するとする。ここで、

$$Z = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{21} \\ Z_{12} & Z_{22} \end{bmatrix}$$

と表記されており、Z_{ij} は $m \times m$ 行列である。

(1) 行列

$$P = -Z_{21}^{-1} Z_{22}$$

は 2 次行列方程式 (15) の解となる。

(2) Φ の (i, j) 要素を ϕ_{ij} と表記し、同様に、Σ の (i, j) 要素を σ_{ij} と表記する。比率 ϕ_{ii}/σ_{ii} が i と共に単調増加列となっているとする。さらに、$\phi_{mm}/\sigma_{mm} < 1$ と仮定する。このとき、P は安定である。つまり、

$$P^n x \to 0 \quad \text{as } n \to \infty \quad \text{for any } x \in R^m$$

である。

この QZ 分解を用いて計算する方が一般化固有値問題を解いて P を求める方法よりも一般性・汎用性をもつ。MATLAB/Octave 等ではこの QZ 分解の組み込み関数が利用できる。[*9]

4 簡単な DSGE モデルのカリブレーション

この節では、Python/Scipy を用いて、DSGE モデルの出発点となっている Hansen モデルのシミュレーションを実際に実行する。代表的家計は生涯にわたる効用

$$E_0[\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(C_t, H_t)]$$

[*9] QZ 分解を用いた行列 P を計算する MATLAB コードが Uhlig によって提供されている。MATLAB/Octave での QZ 分解では、$\Sigma = Y'\Delta Z$, $\Phi = Y'\Xi Z$ という形式で計算することから、この計算に基づいて $P = -(Z')_{21}^{-1}(Z')_{22}$ と計算する必要があるので、注意が必要である。Uhlig のホームページを参考にしてください。Scipy ではまだ QZ 分解のモジュールは準備されていない。

を最大にするような消費 $\{C_t\}$ と労働供給 $\{H_t\}$ を選択する。レジャー L_t は $L_t = 1 - H_t$ で与えられる。言い換えると、家計の有効な使用可能時間を 1 に規格化している。ここで、変数、例えば、C_t の表現における下添え字 t は時刻を表す。E_0 は初期時点での条件付き期待値オペレータである。生産関数を $f(\lambda_t, K_t, H_t)$ で表現する。λ_t は時刻 t における生産技術に対する外的なショックの大きさを表し、K_t は資本投入量、H_t は労働投入量である。資本ストックは蓄積方程式

$$K_{t+1} = (1-\delta)K_{t-1} + I_t$$

に従う。ここで、I_t は時刻 t での投資、δ は資本の減価償却率である。生産された価値は消費と投資に配分されるので、

$$f(\lambda_t, K_t, H_t) = C_t + I_t$$

が成立する。

時刻 t における価値関数を $V(K_t, \lambda_t)$ と定義すると、Bellman 方程式は

$$V(K_t, \lambda_t) = \max_{\{C_t, H_t\}}[u(C_t, H_t) + \beta E_t[V(K_{t+1}, \lambda_{t+1})|\lambda_t]]$$

となる。ここで、関係式

$$C_t = f(\lambda_t, K_t, H_t) + (1-\delta)K_t - K_{t+1}$$

を代入すると、第 1 階の条件は

$$\begin{aligned}
\frac{\partial V(K_t, \lambda_t)}{\partial K_{t+1}} &= -\frac{\partial u(C_t, H_t)}{\partial C_t} + \beta E_t[\frac{\partial V(K_{t+1}, \lambda_{t+1})}{\partial K_{t+1}}|\lambda_t] = 0, \\
\frac{\partial V(K_t, \lambda_t)}{\partial H_t} &= \frac{\partial u(C_t, H_t)}{\partial C_t}\frac{\partial f(\lambda_t, K_t, H_t)}{\partial H_t} + \frac{\partial u(C_t, H_t)}{\partial H_t} = 0
\end{aligned}$$

である。envelope 定理から、

$$\frac{\partial V(K_t, \lambda_t)}{\partial K_t} = \frac{\partial u(C_t, H_t)}{\partial C_t}(\frac{\partial f(\lambda_t, K_t, H_t)}{\partial K_t} + (1-\delta))$$

が成立する。この関係式を上の第 1 階の条件に代入すると、

$$\frac{\partial u(C_t, H_t)}{\partial C_t} = \beta E_t[\frac{\partial u(C_{t+1}, H_{t+1})}{\partial C_{t+1}}(\frac{\partial f(\lambda_{t+1}, K_{t+1}, H_{t+1})}{\partial K_{t+1}} + 1 - \delta)|\lambda_t], \tag{19}$$

$$\frac{\partial u(C_t, H_t)}{\partial H_t} = \frac{\partial u(C_t, H_t)}{\partial C_t}\frac{\partial f(\lambda_t, K_t, H_t)}{\partial H_t} \tag{20}$$

なる関係式が得られる。式 (19) はオイラー方程式と呼ばれているマクロ経済学での基本方程式である。

モデルの数値的な挙動を調べるに当たって

$$Y_t = f(\lambda_t, K_t, H_t) = \lambda_t K_t^\theta H_t^{1-\theta}, \quad u(C_t, H_t) = \mathrm{ln} C_t + A\ln(1-H_t)$$

と具体的な関数形を与えるとき、第 1 階条件は

$$\frac{1}{C_t} = \beta E_t[\frac{\theta\lambda_{t+1}K_{t+1}^{\theta-1}H_{t+1}^{1-\theta} + (1-\delta)}{C_{t+1}}|\lambda_t], \tag{21}$$

$$AC_t = (1-\theta)(1-H_t)\lambda_t k_t^\theta H_t^{-\theta} \tag{22}$$

と簡単化される。また、

$$C_t = \lambda_t K_t^{\theta} H_t^{1-\theta} + (1-\delta)K_t - K_{t+1}$$

が成立している。

要素市場が完全競争市場であれば、資本の限界生産は資本のレンタル価格 (利子率)r に等しく、労働の限界生産は賃金率 w に等しくなる。

$$r_t = \theta\lambda_t K_t^{\theta-1} H_t^{1-\theta} = \theta\frac{Y_t}{K_t}, \quad w_t = (1-\theta)\lambda_t K_t^{\theta} H_t^{-\theta} = (1-\theta)\frac{Y_t}{H_t}.$$

これらの条件を用いると第 1 階条件は

$$\begin{aligned} \frac{1}{C_t} &= \beta E_t[\frac{r_{t+1} + (1-\delta)}{C_{t+1}}|\lambda_t], \\ AC_t &= (1-H_t)(1-\theta)\frac{Y_t}{H_t} \end{aligned}$$

と表現できる。ただし、

$$\begin{aligned} C_t &= Y_t + (1-\delta)K_t - K_{t+1}, \\ Y_t &= \lambda_t K_t^{\theta} H_t^{1-\theta}, \\ r_t &= \theta\frac{Y_t}{K_t} \end{aligned}$$

である。以上が Hansen モデルの動学システムを記述している。$\lambda_t = \bar{\lambda}e^{z_t}$ とすると、確率的外的撹乱過程 z_t は

$$z_{t+1} = \gamma z_t + \epsilon_{t+1}$$

で表現される。ここで、ϵ_t は外生的確率過程である。

定常状態では、$K_t = K_{t+1} = \bar{K}$, $C_t = C_{t+1} = \bar{C}$, $\lambda_t = \lambda_{t+1} = \bar{\lambda}$ とおけるので、労働供給量と資本ストックの定常状態が計算できる。定常状態における労働供給量 $\bar{H}$ と資本ストック $\bar{K}$ は

$$\bar{H} = \frac{1}{1 + \frac{A}{1-\theta}[1 - \frac{\beta\delta\theta}{1-\beta(1-\delta)}]}, \ \bar{K} = \bar{H}[\frac{\theta\bar{\lambda}}{\frac{1}{\beta} - (1-\delta)}]^{\frac{1}{1-\theta}}$$

と与えられる。また、$1/\beta = \bar{r} + 1 - \delta$ が成立している。

Uhlig が提案した方法に従って対数線形化を行う。各変数を

$$C_t = \bar{C}e^{c_t}, \ Y_t = \bar{Y}e^{y_t}, \ H_T = \bar{H}e^{h_t}, \ K_t = \bar{K}e^{k_t}, \ r_t = \bar{r}e^{\tilde{r}_t}, \ \lambda_t = \bar{\lambda}e^{z_t}$$

とおくことにする。ここで、$\bar{\lambda} = 1$ とおいた。これらの関係式を用いて、Hansen モデルを対数線形化すれば

$$\begin{aligned} c_t - E_t[c_{t+1}] + \beta\bar{r}E_t[\tilde{r}_{t+1}] &= 0, \\ y_t - \frac{1}{1-\bar{H}}h_t - c_t &= 0, \\ \bar{Y}y_t - \bar{C}c_t + \bar{K}[(1-\delta)k_t - k_{t+1}] &= 0, \\ z_t + \theta k_t + (1-\theta)h_t - y_t &= 0, \\ y_t - k_t - \tilde{r}_t &= 0 \end{aligned}$$

となる。モデルの内生変数は $[k_{t+1},\ y_t,\ c_t,\ h_t,\ \tilde{r}_t]$ の 5 個であり、外生変数は z_t である。$x_t = k_{t+1}$ を状態変数として、$y_t = [y_t,\ c_t,\ h_t,\ \tilde{r}_t]$ をジャンプ変数とすると、経済モデルの均衡条件式は

$$
\begin{aligned}
Ax_t + Bx_{t-1} + Cy_t + Dz_t &= 0,\\
E_t[Fx_{t+1} + Gx_t + Hx_{t-1} + Jy_{t+1} + Ky_t + Lz_{t+1} + Mz_t] &= 0,\\
z_{t+1} &= Nz_t + \mu_{t+1},
\end{aligned}
$$

という標準表現に帰着する。ここで、A と B は 4×1 行列、C は 4×4 行列となっている。

$$
\begin{aligned}
&A = [0\,, -\bar{K}\,, 0\,, 0]'\\
&B = [0\,, (1-\delta)\bar{K}\,, \theta\,, -1]'\\
&C = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -\frac{1}{1-\bar{H}} & 0\\ \bar{Y} & -\bar{C} & 0 & 0\\ -1 & 0 & 1-\theta & 0\\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}\\
&D = [0,\ 0,\ 1,\ 0]'\\
&F = [0],\ G = [0],\ H = [0]\\
&J = [0,\ -1,\ 0,\ \beta\bar{r}]'\\
&K = [0,\ 1,\ 0,\ 0]'\\
&L = [0],\ M = [0],\ N = [\gamma]
\end{aligned}
$$

以上の Hansen モデルにおいて、

$$\beta = 0.99,\ \delta = 0.025,\ \theta = 0.36,\ A = 1.72,\ \gamma = 0.95$$

と与える。定常状態での値は

$$\bar{H} = 0.333509,\ \bar{K} = 12.669769$$

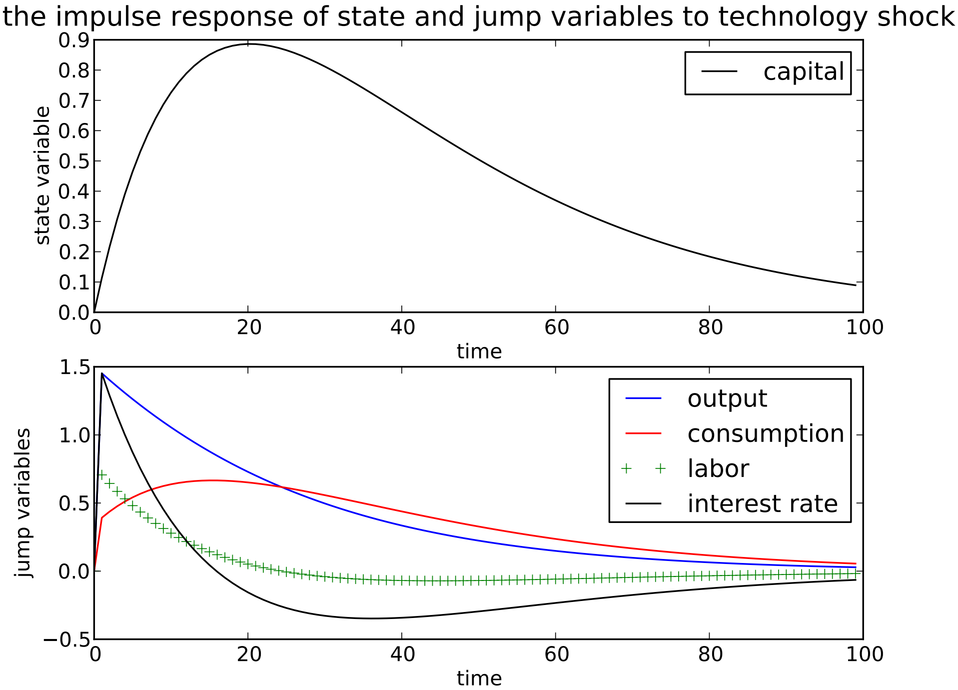
となる。動学的経済モデルの解を動的な均衡則 (8) 式および (9) 式

$$
\begin{aligned}
x_t &= Px_{t-1} + Qz_t,\\
y_t &= Rx_{t-1} + Sy_{t-1},
\end{aligned}
$$

として求める。ただし、$S = -C^{-1}(AD + D)$ である。安定な均衡則を求めるとき、得られた結果は

$$
\begin{aligned}
&P = 0.95367389,\ Q = 0.11318305,\ R = [0.20446019,\ 0.56910286,\ -0.24303095,\ -0.79553981]',\\
&S = [1.45228269,\ 0.39196528,\ 0.70669171,\ 1.45228269]'
\end{aligned}
$$

である。この数値のもとでモデルをシミュレーションする。外的な技術ショックが時刻ゼロで起こり、その後のショックはないとして、$z_0 = 1.0,\ z_t = 0, t = 1, 2, ...$ で、シミュレーション期間が 100 期間のときの結果を以下に示す。



Hansen モデルのカリブレーション

技術ショックに対する各変数の標準偏差の比率は、生産量、消費、労働、利子率のそれぞれに対して

$$\sigma_Y = 5.6752477,\ \sigma_C = 4.07708821,\ \sigma_H = 1.7755454,\ \sigma_r = 3.74218213$$

となっている。 Hansen によれば、米国経済の産出量の標準偏差が 0.0176 と報告されているので、この産出量の標準偏差になるためには、技術ショックの標準偏差は 0.0176/5.6752477=0.00310 と予想される。しかし、現実経済で推計された値は区間 $[0.007, 0.01]$ の間にあると指摘されているので、現実の経済でのデータに比べて小さすぎると言える。

5 金融論の基礎モデル

5.1 MIU モデル

この節では、金融論の基礎モデルとして活用されている cash-in-advance モデルと money-in-utility モデルを取り上げる。最初に、money-in-the-utility function(MIU) モデルを取り上げる。このモデルでは、実質貨幣残高の増加が家計の効用水準を上昇させることが前提とされている。実質貨幣残高の増加が家計の効用水準を上昇させる理由として、十分な貨幣を保有するとが財やサービスの市場取引にかかる費用を低下させることをあげている。時刻 t での家計 i の効用関数は

$$u(c_t^i, \frac{m_t^i}{P_t}, l_t^i) = u(c_t^i, \frac{m_t^i}{P_t}, 1 - h_t^i)$$

で与えられる。ここで、c_t^i は消費量、m_t^i は貨幣保有量、P_t は財価格、h_t^i は労働供給量である。有効時間を 1 に規格化しているので、レジャー時間は $1 - h_t^i$ である。各家計を添え字 i でインデックス付ける。マクロ経済

を構成する各家計は区間 $[0,1]$ の間に一様に分布しており、家計の総計は 1 である。よって、$i \in [0,1]$ である。各家計 i は期待効用関数の現在割引価値

$$E_0[\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_t^i, \frac{m_t^i}{P_t}, 1-h_t^i)]$$

を最大するように、消費量 c_t^i、貨幣量 m_t^i、および、労働供給量 h_t^i を選択する。

マクロ経済の生産関数を

$$y_t = f(\lambda_t, K_t, H_t)$$

と仮定する。K_t は資本量の経済全体での総計、H_t は総家計の労働供給量なので、

$$K_t = \int_0^1 k_t^i di, \quad H_t = \int_0^1 h_t^i di$$

と定義される。λ_t は生産技術の水準を表す。要素市場が完全競争市場であれば、資本の限界生産は資本のレンタル価格 (利子率)r に等しく、労働の限界生産は賃金率 w に等しくなる。

$$r_t = \frac{\partial f(\lambda_t, K_t, H_t)}{\partial K_t}, \quad w_t = \frac{\partial f(\lambda_t, K_t, H_t)}{\partial H_t}.$$

家計 i は前期から手持ちの貨幣量 m_{t-1}^i を持ち越し、当該期の始めに政府から貨幣の移転を受け取るとする。この政府からの貨幣移転を $g_t M_{t-1}$ とする。家計 i は期間 t の期首に金融資産として貨幣と債券を保有している。期間 $t-1$ から持ち越した債券 b_{t-1}^i は名目利子率 i_{t-1} で表現される収益を生む。 よって、家計 i が期間 t の期首に持ち越す金融資産を a_t と実質値で表記すると

$$a_t^i = \{m_{t-1}^i + (1+i_{t-1})b_{t-1}^i + g_t M_{t-1}\}/P_t$$

である。家計は金融資産 a_t^i を保有するだけでなく、前期に蓄積した資本量 k_t^i を持ち越す。期間 t における家計のフローの所得は賃金所得 $w_t h_t^i$ と資本のレンタル料 $r_t k_t^i$ である。よって、家計の予算制約式は

$$c_t^i + k_{t+1}^i + \frac{m_t^i + b_t^i}{P_t} = w_t h_t^i + r_t k_t^i + (1-\delta)k_t^i + a_t^i$$

と表現できることになる。ここで、期間 $t+1$ に持ち越す金融資産は

$$a_{t+1}^i = \{m_t^i + (1+i_t)b_t^i + g_{t+1}M_t\}/P_{t+1}$$

である。状態変数を a_t^i, k_t^i とできるので、価値関数を $V(a_t^i, k_t^i)$ と表記するとき、動的計画法の Bellman 方程式は

$$V(a_t^i, k_t^i) = \max_{c_t^i, m_t^i, h_t^i} [u(c_t^i, \frac{m_t^i}{P_t}, 1-h_t^i) + E_t V(a_{t+1}^i, k_{t+1}^i)]$$

となる。以下の計算では、家計のインデックス i を省略する。最適解の第 1 階の条件は

$$u_c(c_t, \frac{m_t}{P_t}, 1-h_t) = \beta E_t[V_k(a_{t+1}, k_{t+1})], \tag{23}$$

$$-u_h(c_t, \frac{m_t}{P_t}, 1-h_t) = \beta E_t[V_k(a_{t+1}, k_{t+1}) w_t], \tag{24}$$

$$u_m(c_t, \frac{m_t}{P_t}, 1-h_t) = -\beta E_t[V_a(a_{t+1}, k_{t+1})/(1+\pi_{t+1})] + \beta E_t[V_k(a_{t+1}, k_{t+1})], \tag{25}$$

$$\beta E_t[V_a(a_{t+1}, k_{t+1}) \frac{1+i_t}{1+\pi_{t+1}}] = \beta E_t[V_k(a_{t+1}, k_{t+1})] \tag{26}$$

である。ここで、π_t は $\pi_t = P_t/P_{t-1} - 1$ と定義されるインフレ率である。envelope 定理から

$$V_a(a_t, k_t) = \beta E_t[V_k(a_{t+1}, k_{t+1})], \tag{27}$$
$$V_k(a_t, k_t) = \beta E_t[V_a(a_{t+1}, k_{t+1})(r_t + 1 - \delta)] \tag{28}$$

が成立している。

以上の条件を整理すると、経済の動的変動を表現する以下のような動的方程式が得られる。

$$u_m(c_t, \frac{m_t}{P_t}, 1 - h_t) = \frac{i_t}{1 + i_t} u_c(c_t, \frac{m_t}{P_t}, 1 - h_t), \tag{29}$$
$$-u_h(c_t, \frac{m_t}{P_t}, 1 - h_t) = u_c(c_t, \frac{m_t}{P_t}, 1 - h_t) w_t, \tag{30}$$
$$u_c(c_t, \frac{m_t}{P_t}, 1 - h_t) = \beta E_t[(r_{t+1} + 1 - \delta) u_c(c_{t+1}, \frac{m_{t+1}}{P_{t+1}}, 1 - h_{t+1})], \tag{31}$$
$$\frac{1 + i_t}{1 + \pi_{t+1}} = r_{t+1} + 1 - \delta \tag{32}$$

これらの方程式の経済学的な含意は金融論では常識となっているので、ここでは説明を要しない。各家計が同一であると仮定するとき、

$$K_t = k_t^i,\ H_t = h_t^i,\ C_t = c_t^i,\ M_t = m_t^i,\ B_t = b_t^i$$

となっている。以下ではこれを仮定する。$\hat{m}_t = M_t/P_t$ および $\hat{b}_t = B_t/P_t$ と表記する。実物市場での均衡条件式は、

$$K_{t+1} = f(K_t, H_t) - C_t + (1 - \delta) K_t$$

であり、資本の蓄積方程式となっている。

経済への外的な撹乱は生産技術へのショックと貨幣供給へのショックの 2 種類となっている。

$$\lambda_t = \bar{\lambda} e^{z_t^p},$$
$$g_t = \bar{g} + z_t^g$$

と表現できて、撹乱過程がそれぞれ以下のような AR(1) 過程

$$z_{t+1}^p = \rho_p z_t^p + \epsilon_{t+1}^p, \tag{33}$$
$$z_{t+1}^g = \rho_g z_t^g + \epsilon_{t+1}^g \tag{34}$$

で表現できるとする。ここで、ϵ_t^p と ϵ_t^g は互いに i.i.d. 確率過程とする。貨幣供給量は

$$\frac{M_t}{P_t} = (1 + g_t) \frac{M_{t-1}}{P_t} = \frac{1 + g_t}{1 + \pi_t} \hat{m}_{t-1}$$

となっており、$\hat{m}_t$ は実質貨幣残高 M_t/P_t である。

モデルの定常状態での特徴を分析する。実質値が一定となる状態を定常状態と定義する。したがって、定常状態では、

$$c_t = c_{t+1} = c^{ss},\ k_t = k_{t+1} = k^{ss},\ h_t = h_{t+1} = h^{ss}, \hat{m}_t = \hat{m}_{t+1} = \hat{m}^{ss}$$

となっている。上添え字 ss で定常状態でに値を示す。消費のオイラー方程式から、

$$r^{ss} + 1 - \delta = \beta^{-1}$$

が成立する。よって、

$$f_k(\bar{\lambda}, k^{ss}, h^{ss}) = \beta^{-1} - 1 + \delta$$

である。この式は、生産技術が規模に関して収穫一定である限り、資本／労働比率 $k^{ss}/h^{ss} = \hat{k}^{ss}$ が割引率と減価償却率にのみ依存し、貨幣量の大小には依存しないことを意味する。資源制約式から、

$$c^{ss} = f(\bar{\lambda}, k^{ss}, h^{ss})/h^{ss} - \delta k^{ss}/h^{ss})h^{ss} = \bar{\phi} h^{ss}$$

が成立する。ただし、$\phi(k/h) = f(\bar{\lambda}, k, h)/h,\ \bar{\phi} = \phi(k^{ss}/h^{ss}) - \delta k^{ss}/h^{ss}$ と定義した。 労働に関する第 1 階条件 (20) 式より、

$$\frac{-u_h(\bar{\phi}h^{ss}, \hat{m}^{ss}, 1 - h^{ss})}{u_c(\bar{\phi}h^{ss}, \hat{m}^{ss}, 1 - h^{ss})} = f_h(\bar{\lambda}, k^{ss}, h^{ss}) = \phi(\hat{k}^{ss}) - \hat{k}^{ss}\phi'(\hat{k}^{ss})$$

である。効用関数が貨幣に関して分離可能であるとき、u_c および u_h は貨幣量に依存しない。したがって、労働供給 h^{ss} は貨幣量に依存しないで、決定される。よって、消費量も貨幣量に依存しない。貨幣のスーパー中立性が成立している。しかし、効用関数が貨幣に関して分離可能でない場合、貨幣のスーパー中立性は成立しない。貨幣供給量の拡大率は連動してインフレ率の増大を引き起こし、債券の名目利子率を増加させ、貨幣保有の機会費用を上昇させる。貨幣保有の第 1 階条件式から

$$\frac{u_m(\bar{\phi}h^{ss}, \hat{m}^{ss}, 1 - h^{ss})}{u_c(\bar{\phi}h^{ss}, \hat{m}^{ss}, 1 - h^{ss})} = \frac{i^{ss}}{1 + i^{ss}} = \frac{1 + \pi^{ss} - \beta}{1 + \pi^{ss}}$$

が成立している。労働に関する第 1 階条件と 貨幣保有に関する第 1 階条件式を連立すると、労働供給 h^{ss} と実質貨幣残高 $\hat{m}^{ss}$ の値が決定される。$\pi^{ss} = \bar{g}$ ので、労働供給 h^{ss} と実質貨幣残高 $\hat{m}^{ss}$ の値は $\bar{g}$ の大きさに依存する。貨幣成長率の増加が労働供給をどのように変化させるかは効用関数の性質に依存する。

モデルを解析的に解いて、動学的な挙動を分析することは極めて困難であるので、パラメータ値を変更させつつ、モデルのカリブレーションを実行させて、その結果を考察するという手続きが必要となる。McCandless(2008) に従って、家計の効用関数を

$$u(c_t^i, h_t^i) = \ln c_t^i + D \ln \frac{m_t^i}{P_t} + Bh_t^i$$

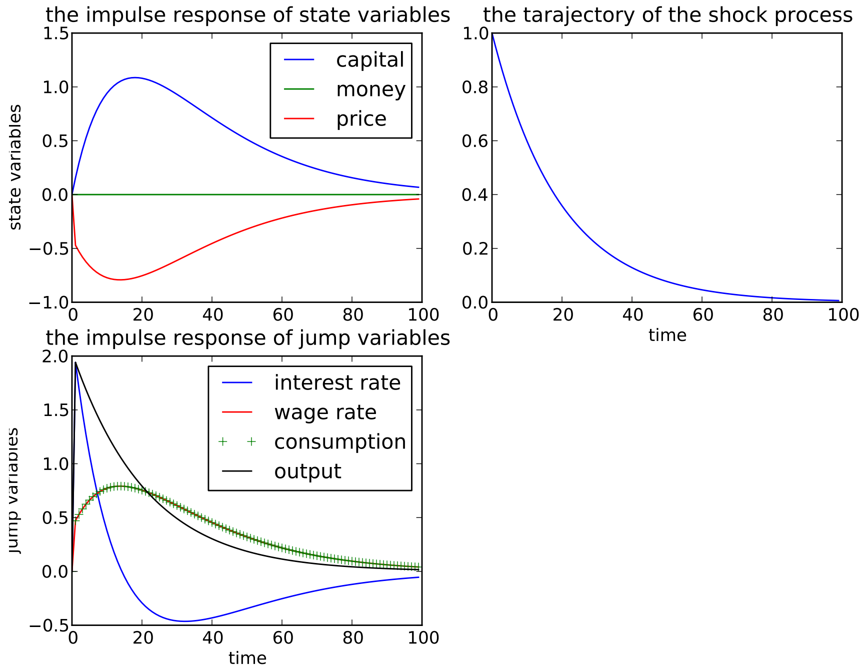
と仮定し、生産関数を

$$f(\lambda_t, K_t, H_t) = \lambda_t K_t^{\theta} H_t^{(1-\theta)}$$

と仮定する。各パラメータに以下のような値を設定する。

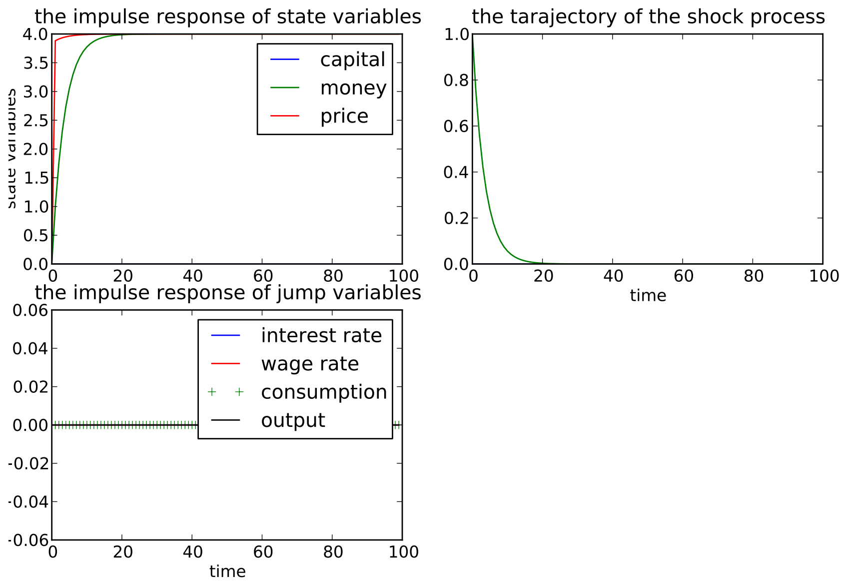
$$\beta = 0.99,\ \delta = 0.025,\ \theta = 0.36, \bar{\lambda} = 1.0,\ \ B = -2.5805,\ D = 0.01,\ \bar{g} = 0,\ \rho_p = 0.95,\ \rho_g = 0.48$$

この条件の下で、MIU モデルを対数線形化して、この線形化したモデルのシミュレーションを行う。技術ショックに対するインパルス応答関数は以下のようなグラフとなる。



MIU モデルのカリブレーション:生産技術へのショック

貨幣ショックに対するインパルス応答関数は以下のようなグラフとなる。



MIU モデルのカリブレーション:貨幣供給へのショック

このグラフ上で利子率は実質値表示である。明らかに、貨幣ショックは名目値のみを変化させ、実質値に何の影響も与えない。

Walsh(2010) も同様なカリブレーションを行っている。彼が用いた効用関数は、

$$u(c_t, m_t/P_t, h_t) = \frac{[ac_t^{1-b} + (1-a)(m_t/P_t)^{1-b}]^{(1-\Psi)/(1-b)}}{1-\Psi} + \psi\frac{(1-h_t)^{1-\eta}}{1-\eta}$$

という消費と貨幣保有が分離不可となっている CES 関数である。各パラメータ値は

$$\beta = 0.989,\ \delta = 0.019,\ \theta = 0.36, a = 0.99,\ b = 3.0,\ \Psi = 2.0,\ \psi = 1.34,\ \eta = 1.,\ \bar{g} = 0.01,\ \rho_p = 0.95,\ \rho_g = 0.75$$

と設定されている[10]。

5.2 CIA モデル

Hansen and Cooly(1989) によって提案された cash-in-advance モデルを展開する。マクロ経済を構成する各家計は区間 $[0,1]$ の間に一様に分布しており、家計の総計は 1 である。各家計を添え字 i でインデックス付ける。$i \in [0,1]$ である。各家計 i は期待効用関数の現在割引価値

$$E_0[\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_t^i, 1-h_t^i)]$$

を最大するように、消費量 c_t^i と労働供給量 h_t^i を選択する。有効時間を 1 に規格化しているので、レジャー時間は $1-h_t^i$ である。マクロ経済の生産関数を

$$y_t = f(\lambda_t, K_t, H_t)$$

と仮定する。K_t は資本量の経済全体での総計、H_t は総家計の労働供給量なので、

$$K_t = \int_0^1 k_t^i di, \quad H_t = \int_0^1 h_t^i di$$

と定義される。λ_t は生産技術の水準を表す。要素市場が完全競争市場であれば、資本の限界生産は資本のレンタル価格 (利子率)r に等しく、労働の限界生産は賃金率 w に等しくなる。

$$r_t = \frac{\partial f(\lambda_t, K_t, H_t)}{\partial K_t}, \quad w_t = \frac{\partial f(\lambda_t, K_t, H_t)}{\partial H_t}.$$

次に、各家計の予算制約を考える。家計 i は前期から手持ちの貨幣量 m_{t-1}^i を持ち越し、当該期の始めに政府から貨幣の移転を受け取るとする。この政府からの貨幣移転を $g_t M_{t-1}$ とする。ここで、M_{t-1} は前期末 (期間 $t-1$ 末）の一人当たり総貨幣量とする。g_t は貨幣供給の成長率である。$g_t > 0$ であるとき、貨幣供給量は増加する。期間 t における家計 i の cash-in-advance 制約は

$$P_t c_t^i \le m_{t-1}^i + g_t M_{t-1} \tag{35}$$

となる。ここで、P_t は期間 t における価格である。この仮定は、期間 t が始まると、まず、財市場での取引が開始され、その後に資産市場が開かれて、債券の取引が行われると想定している[11]。また、通常は、この制約

[10] 詳細は Walsh(2010) の第 2 章を参照のこと。Walsh は MATLAB/Dynare を用いてシミュレーションを実行している。このシミュレーションの MATLAB コードは Walsh のホームページ http://people.ucsc.edu/ walshc からダウンロード可能である。

[11] 期間 t が始まると最初に資産市場で取引が開始され、その後に財の取引が行われるというケースに対応するモデルは Walsh(2010) で展開されている。

式は等式で成立すると想定できる。上記の貨幣供給に関する仮定では、各家計の貨幣保有量とは無関係に政府からの貨幣移転量が決まる。政府からの移転が各家計の貨幣保有量に依存するときは、仮定を変更しなければならない。貨幣供給の成長率は割引率よりも大きいと仮定する、$g_t \geq \beta$。もしこの仮定が成り立たないと、消費が時間と共に β よりも大きな率で拡大し続けるという問題が生じる。

家計 i は期間 t の期首に金融資産 $P_t a_t^i = m_{t-1}^i + (1+i_{t-1})b_{t-1}^i$ を保有するだけでなく、前期に蓄積した資本量 k_t^i を持ち越す。期間 t における家計のフローの所得は賃金所得 $w_t h_t^i$ と資本のレンタル料 $r_t k_t^i$ である。よって、家計の予算制約式は

$$c_t^i + k_{t+1}^i + \frac{m_t^i + b_t^i}{P_t} = w_t h_t^i + r_t k_t^i + (1-\delta)k_t^i + \frac{m_{t-1}^i + g_t M_{t-1} + (1+i_{t-1})b_{t-1}^i}{P_t} \tag{36}$$

となる。キャッシュ制約 (35) と予算制約式 (36) の下に生涯にわたる効用関数最大化問題をラグランジュ乗数を用いて解くと、以下のような第 1 階の条件式が成立する。

$$-u_h(c_t, 1-h_t) = \beta u_c(c_t, 1-h_t)\frac{w_t}{1+\pi_{t+1}}, \tag{37}$$

$$u_c(c_t, 1-h_t) = E_t[(r_{t+1} + 1 - \delta)\frac{1+\pi_t}{1+\pi_{t+1}} u_c(c_{t+1}, 1-h_{t+1})], \tag{38}$$

$$\frac{1+i_{t-1}}{1+\pi_t} = r_t + 1 - \delta \tag{39}$$

各家計が同一であると仮定するとき、

$$K_t = k_t^i,\ H_t = h_t^i,\ C_t = c_t^i,\ \hat{M}_t = \hat{m}_t^i = 1\ (M_t = m_t^i)$$

となっている。$\hat{m}_t = M_t/P_t$ および $\hat{b}_t = B_t/P_t$ と表記する。実物市場での均衡条件式は、

$$K_{t+1} = f(K_t, H_t) - C_t + (1-\delta)K_t$$

であり、資本の蓄積方程式となっている。

技術進歩に関して、$\lambda_t = \bar{\lambda}e^{z_t^p}$ とおいて、

$$z_{t+1}^p = \gamma z_t^p + \epsilon_{t+1}^p$$

と想定する。ϵ_{t+1}^p は i.i.d. 確率過程であるとする。外的撹乱項は生産技術へのショックと貨幣供給へのショックからなる。貨幣供給へのショックを $g_t = \bar{g} + z_t^g$ とおいて、z_t^g が

$$z_{t+1}^g = \pi z_t^g + \epsilon_{t+1}^g$$

に従うとする。ϵ_{t+1}^g は i.i.d. 確率過程であるとする。利子率および賃金率は

$$r_t = \theta\lambda_t K_t^{\theta-1}H_t^{1-\theta} = \theta\frac{Y_t}{K_t}, \quad w_t = (1-\theta)\lambda_t K_t^{\theta}H_t^{-\theta} = (1-\theta)\frac{Y_t}{H_t}.$$

で与えられる。

定常状態での性質を分析する。消費のオイラー方程式から

$$\beta^{-1} = r^{ss} + 1 - \delta$$

であるから、MIU モデルと同じく、資本／労働比率 $\hat{k}^{ss}$ は割引率と減価償却率にのみ依存し、貨幣成長率には依存しない。よって、賃金率 w^{ss} も貨幣成長率 $\bar{g}$ には依存しない。貨幣の供給ルールから、$\hat{m}^{ss} = (1+\bar{g})/(1+\pi^{ss})\hat{m}^{ss}$ が成立するので、インフレ率は貨幣成長率に等しい。また、CIA 制約から、$c^{ss} = \hat{m}^{ss}$ が成り立つ。資源制約式から $c^{ss} = \bar{\phi}h^{ss}$ なので、消費／労働比率も貨幣成長率に依存しない。労働供給に関する第 1 階の条件から、

$$\frac{-u_h(\bar{\phi}h^{ss}, 1-h^{ss})}{u_c(\bar{\phi}h^{ss}, 1-h^{ss})} = \beta\frac{w^{ss}}{1+\pi^{ss}}$$

が得られる。この式は労働供給量 h^{ss} がインフレ率、言い換えると、貨幣成長率に依存して変化することを意味する。労働と消費が分離可能で、レジャーの限界効用が逓減するならば、貨幣成長率の上昇は労働供給を減少させる。貨幣はスーパー中立的ではない。

McCandless(2008) に従って、家計の効用関数を

$$u(c_t^i, h_t^i) = \ln c_t^i + [A\frac{\ln(1-h_0)}{h_0}]h_t^i$$

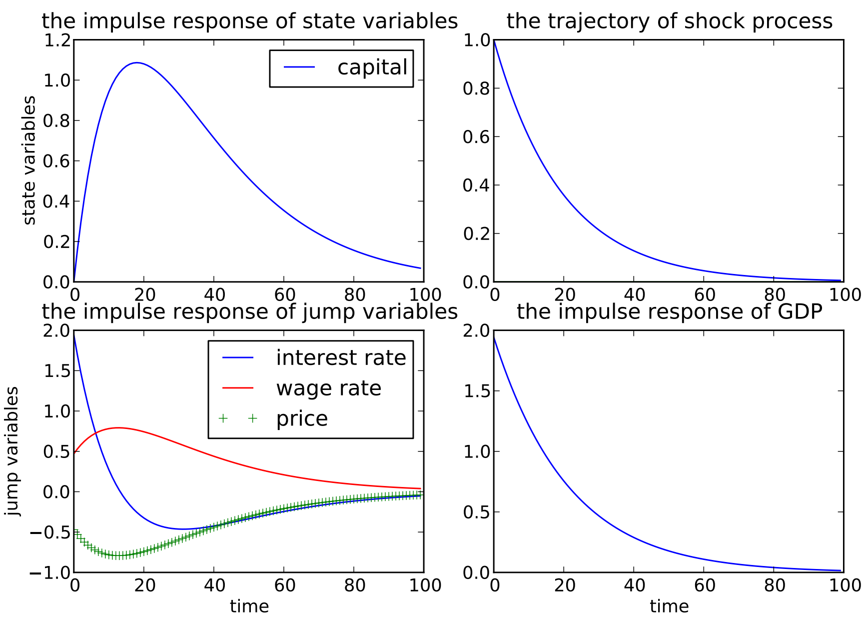
と仮定する。生産関数を

$$f(\lambda_t, K_t, H_t) = \lambda_t K_t^{\theta} H_t^{(1-\theta)}$$

と仮定する。各パラメータに以下のような値を設定する。

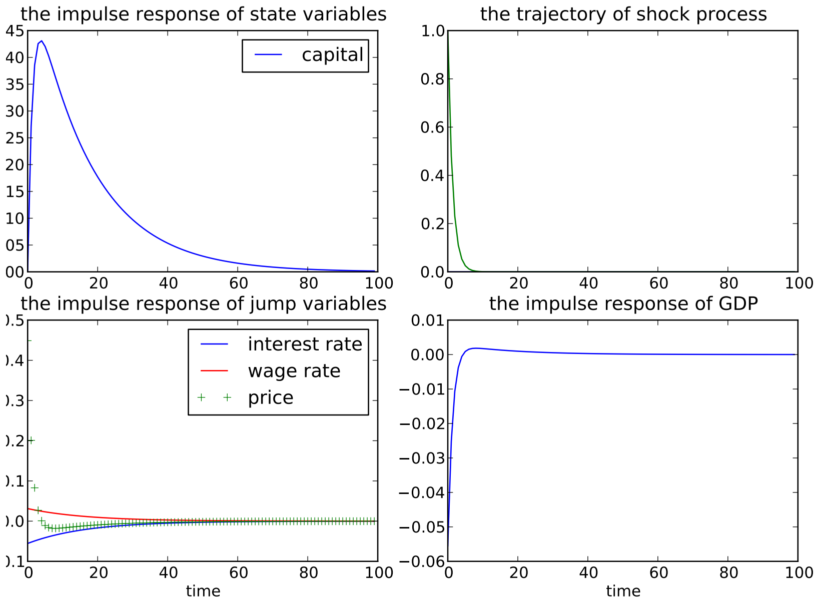
$$\beta = 0.99,\ \delta = 0.025,\ \theta = 0.36, \bar{\lambda} = 1.0,\ \ A = 1.72,\ \bar{g} = 0\ \rho_p = 0.95,\ \rho_g = 0.48$$

この条件の下で、CIA モデルを対数線形化して、この線形化したモデルのシミュレーションを行う。技術ショックに対するインパルス応答関数は以下のようなグラフとなる。



CIA モデルのカリブレーション:生産技術へのショック

貨幣ショックに対するインパルス応答関数は以下のようなグラフとなる。



CIA モデルのカリブレーション:貨幣供給へのショック

貨幣供給の増大は価格を上昇させるので、名目消費や名目 GDP は増加するが、実質で見ると一時的に減少が起こっている。

Walsh(2010) も CIA モデルのカリブレーションを行っている。彼が用いた効用関数は、

$$u(c_t, m_t/P_t, h_t) = \frac{[ac_t^{1-b} + (1-a)(m_t/P_t)^{1-b}]^{(1-\Psi)/(1-b)}}{1-\Psi} + \psi\frac{(1-h_t)^{1-\eta}}{1-\eta}$$

であり、各パラメータ値は

$\beta = 0.989,\ \delta = 0.019,\ \theta = 0.36, a = 0.99,\ b = 3.0,\ \Psi = 2.0,\ \psi = 1.34,\ \eta = 1.0,\ \bar{g} = 0.01,\ \rho_p = 0.95,\ \rho_g = 0.75$

と設定されている[*12]。

Reference

(1). Ben S. Bernanke, Mark Gertler and Simon Gilchrist(1999), The Financial Accelerator in a Quantitative Framework, in *Handbook of Macroeconomics*, vol.2, edited by J. B. Taylor and M. Woodford, Elsevier Science.

(2). Charles T. Carlstrom and Timothy S. Fuerst(1997), Agency Cost, Net Worth, and Business Fluctuations: A Computable General Equilibrium Analysis, *American Economic Review*, 87(5).

[*12] 詳細は Walsh(2010) の第 3 章に記述されている。Walsh が用いた MATLAB 向けおよび Dynare 向けの 2 種類のプログラム・コードは Walsh のホームページ http://people.ucsc.edu/ walshc からダウンロード可能である。

(3). Lawrence J. Christiano, Martin Eichenbaum and Charles Evans(2005), Nominal Rigidities and the Dynamic Effects of a Shock to Monetary Policy, *Journal of Political Economy*, 113(1)

(4). Michael Dotsey and Robert G. King(2005), Implications of State-Dependent Pricing for Dynamic Macroeconomic Models, *Journal of Monetary Economics*, 52.

(5). Jordi Galí, Mark Gertler and D. Lopez-Salido(2001), European Inflation Dynamics, *European Economic Review*, 45(7).

(6). Jordi Galí(2008), *Monetary Policy, Inflation, and the Business Cycle: An Introduction to the New Keynesian Framework*, Princeton University Press.

(7). Mark Gertler, Simon Gilchrist and Fabio M. Natalucci(2004), External Constraints on Monetary Policy and the Financial Accelerator, *Journal of Money, Credit and Banking*, 39(2-3).

(8). Mark Gertler and John Leahy(2008), A Phillips Curve with an Ss Foundation, *Journal of Political Economy*, 116(3).

(9). Gary Hansen(1985), Indivisible Labor and the Business Cycle, *Journal of Monetary Economics*, 16.

(10). Finn Kydland and Edward C. Prescott(1982), Time to Build and Aggregate Fluctuations, *Econometrica*, 50.

(11). Lars Ljungqvist and Thomas J. Sargent(2004), *Recursive Macroeconomic Theory*, Second edition, The MIT Press.

(12). George McCandless(2008), *The ABCs of RBCs: An introduction to Dynamic Macroeconomic Models*, Harvard University Press.

(13). Thomas J. Sargent(1987), *Dynamic Macroeconomic Theory*, Harvard University Press.

(14). Frank Smets and Rafael Wouters(2007), Shocks and Frictions in US Business Cycles: A Bayesian DSGE Approach, *American Economic Review*, 97(3).

(15). John Stachurski(2009), *Economic Dynamics: Theory and Computation*, The MIT Press.

(16). Nancy Stokey and Robert Lucas(1989), *Recursive Methods in Economic Dynamics*, Harvard University Press.

(17). Herald Uhlig(1999), A Toolkit for Analysing Nonlinear Stochastic Models Easily, in *Computational Methods for Study of Dynamic Economies*, edited by Ramon Marion and Andrew Scott, Oxford University Presss.

(18). Carl E. Walsh(2010), *Monetary Theeory and Policy*, Third edition, The MIT Press.

(19). Michael Woodford(2003), *Interest and Prices: Foundations of a Theory of Monetary Policy*, Princeton University Press.