

# 講義ノート 経済的ネットワークのモデル

増山 幸一  
明治学院大学経済学部

2014年12月: in progress version

## 目次

1	序	1
2	ネットワーク理論と社会・経済ネットワークの特徴	2
2.1	ネットワークの例	2
2.2	ネットワークの定義と主要概念	5
2.3	現実社会でのネットワークの特徴	8
3	交通ネットワークのモデル	10
3.1	交通ネットワークにおけるゲーム	10
3.2	道路ネットワークと Braess の逆説	12
4	取引ネットワークのモデル	14
4.1	2項グラフにおける割当問題	14
4.2	取引ネットワークと均衡価格	18
4.3	ネットワークにおける交渉力	21
5	情報カスケードとネットワーク効果のモデル	24
5.1	情報カスケード	24
5.2	ネットワーク効果の簡単な例	27
6	イノベーションと感染症の拡散モデル	29
6.1	新製品の浸透モデル	29
6.2	病原菌の感染モデル	30

## 1 序

私たちは、人と人の間に形成された社会的なネットワークの中で日々の生活を送っている。ネットワークとは、各主体の間あるいは各ユニットの間に働く相互依存関係を表現するものである。ネットワークは、数学的には、ノード (nodes, vertices) の集合とそれらのノード間を連結するリンク (links, edges) の集合によって記

述される。ネットワーク研究は、情報流通、インターネットの web、情報交換、貿易流通、金融資産の流れ、友人関係、信頼関係、病気の伝染、技術革新の伝搬など、多領域にまたがる複合領域を研究対象としてきた。

この講義ノートでは、主として社会的なネットワークを取り上げ、経済学の立場からそれを分析するために必要なモデルと分析概念を解説する。社会経済ネットワークはそれを構成するノード（結節点）が人間あるいは人的組織であり、人間あるいは人的組織の意思決定がネットワーク上で相互関係している点に特徴がある。よって、社会経済ネットワークの重要な特徴は、ネットワーク内のリンク接続の構造に依存するだけでなく、ネットワーク構造上で起きる行為の相互干渉の性格にも大きく依存する。ネットワーク内の各主体あるいは組織の意思決定はネットワーク上で相互依存するので、社会経済ネットワークの分析ではゲーム理論の枠組みが必要となる。

ネットワーク分析の数学的手法はグラフ理論と呼ばれる離散数学の 1 分野である\*<sup>1</sup>。グラフ理論は、Euler(1735) による Königsberg 橋問題への解答手法に発端を持つ。次節で、社会経済ネットワークの分析で必要となるネットワーク理論の基礎的な概念と分析ツールについて説明し、現実社会で観察されるネットワークの典型的な事例を取り上げて、それらに共通する特徴について説明する。第 3 節では、交通ネットワークのナッシュ均衡の特徴、Braess の逆説などを取り上げ、ゲーム的な観点からネットワーク効果を分析する。取引ネットワークは周知の通り、協調ゲームによって定式化されることが知られている。第 4 節では、取引ネットワークの協調ゲーム・モデルを取り上げ、マッチング・ゲームと交渉ゲームの応用例を取り上げる。第 5 節では、情報カスケード、ネットワークにおける外部効果に起因する複数均衡問題を分析する。最後の節で、ネットワーク上での病原菌の感染、情報の伝搬がどのように行われるのかを分析するための基礎的なモデルを説明する。

## 2 ネットワーク理論と社会・経済ネットワークの特徴

### 2.1 ネットワークの例

社会・経済ネットワークの分析で最初に登場する代表的な例は 15 世紀初期イタリア・フィレンツェにおける Medici 家の興隆を巡る家系間のネットワーク分析である。政略的結婚を通じた血縁ネットワークの拡大をテコに富と政治的権力を獲得していった過程が鮮明に理解できる。

---

\*<sup>1</sup> グラフ理論の代表的な教科書は、Béla Bollobás(1998), *Modern Graph Theory*, Springer、および、Reinhard Diestel(2010), *Graph Theory, Fourth Edition*, Springer などである。最近のネットワーク理論の代表的な教科書は、M. E. J. Newman(2010), *Networks: An Introduction*, Oxford University Press である。

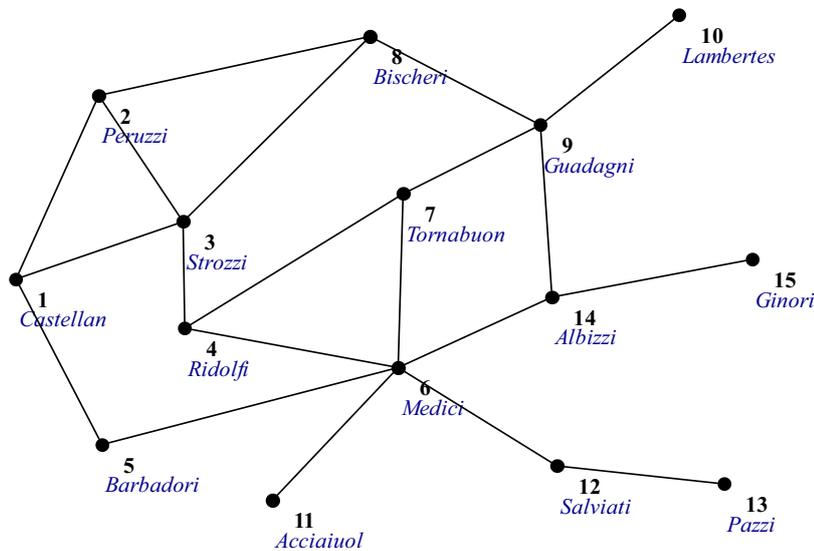


Fig.1 15世紀フィレンツェにおける Medici 家と主要家系のネットワーク

Padgett and Ansell(1993)<sup>\*2</sup>の研究によれば、15世紀フィレンツェにおける主要な血縁門閥のネットワークは Fig.1 にある通りである。家系  $i$  と家系  $j$  を結びつける最短距離の経路の総数を  $P(i, j)$  と表記し、これらの経路の中に家系  $k$  が含まれている経路数を  $P_k(i, j)$  と表記する。Barbadori 家と Guadagni 家を結ぶ最短距離の経路は、3つのリンク(枝)を経由する 5-6-14-9 という経路と 5-6-7-9 の経路の2経路である。だから、 $i = \text{Barbadori}$ 、 $j = \text{Guadagni}$  としたとき、 $P(i, j) = 2$  である。 $k = \text{Medici}$  とすると、 $P_k(i, j) = 2$  である。 $k = \text{Strozzi}$  とおくと  $P_k(i, j) = 0$ 、 $k = \text{Albizzi}$  とおくと  $P_k(i, j) = 1$  となる。Medici 家は Barbadori 家と Guadagni 家を結びつける上で中心的役割を果たす家系となっている。ネットワークにおけるこうした中心的役割を数量的に表現するために、中継中心化指数と呼ばれ統計量を使用する。この計量化を活用すると、Medici 家の指数は 0.522 となる。Medici 家以外の2家系を結ぶ最短経路総数のうち 52% の経路は Medici 家を経由していることがわかる。Strozzi 家の中継集中度指数を計算すると、0.103 となる。Medici 家の次にこの値が大きい家系は Guadagni 家で、その値は 0.225 である。このことから、Medici 家の政略結婚がネットワークの構築に重要な役割をはたしたかを理解できる。

以下の例は、1970年12月時点での ARPANET(Advanced Research Projects Agency Network)<sup>\*3</sup> と呼ばれるコンピュータ・インターネットのネットワーク構造を描いたものである。各ノードはホスト・コンピュータが置かれている大学等を表現しており、リンクは各ホスト・コンピュータが専用回線で直接に接続していることを示す。

<sup>\*2</sup> J. F. Padgett and C. Ansell(1993), Robust Action and the Rise of the Medici: 1400-1434, *American Journal of Sociology*, 98, 1259-1319.

<sup>\*3</sup> ARPANET は 1969 年に米国国防総省の国防高等研究計画局のもとに構築された研究・調査のための大型汎用コンピュータのネットワークである。初期のノードは UCLA、UCSB、SRI (スタンフォード大学)、ユタ大学の4大学であった。

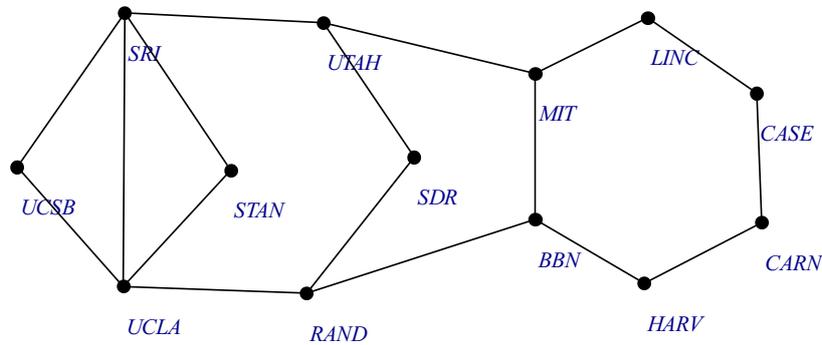


Fig.2 1970年12月でのARPANETネットワーク

ホスト・コンピュータを置く機関は、地理的には東海岸のMITやハーバード大学から西海岸のスタンフォード大学やUCLAなどの13大学等で、ネットワーク上では、リンクされた各ノード間の地理的距離はあまり関係がない。ちなみに、RAND研究所はカリフォルニア州サンタモニカに位置するが、BBN社はマサチューセッツ州ケンブリッジに位置する。

学校生活、趣味やボランティア活動などの社会的な活動、あるいは、会社を運営する、商品販売の営業をする、共同研究開発に従事するなどという経済的な活動を結節点として、通常の社会的ネットワークは形成されていく。参加している社会的団体や経済的組織はネットワーク形成におけるフォーカル・ポイント（中心点）である。団体・組織の集合をフォーカル・ポイントとして形成されるネットワークは2項グラフ (bipartite graph) として表現できる。2項グラフでは、各ノードは、個人からなる集合と団体・組織からなる集合のどちらかに2分類され、個人集合に属するノードと団体・組織の属するノードにリンクが形成される。下の図は米国有名企業の取締役間の2項ネットワークの例である。

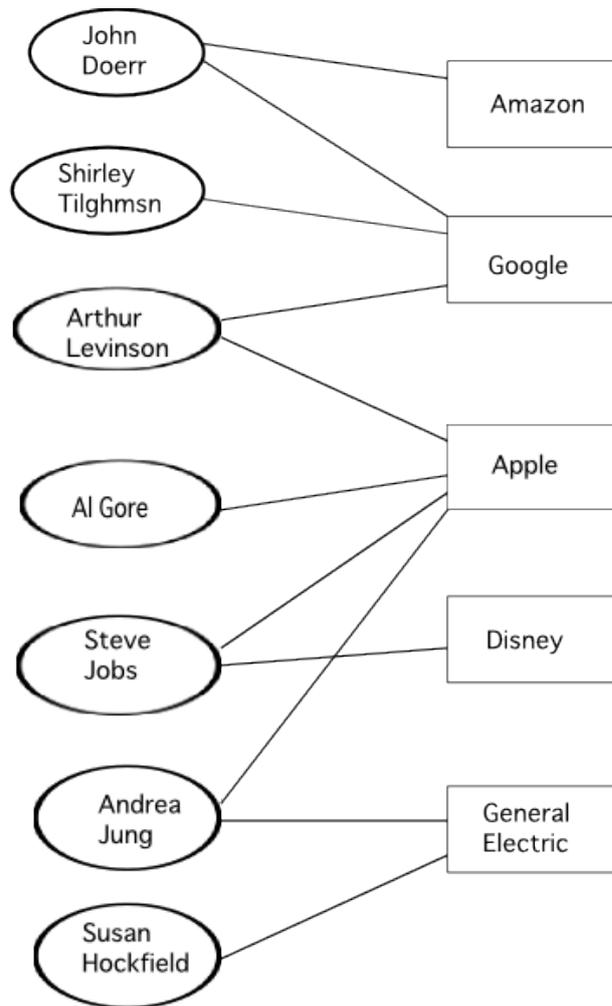


Fig.3 2項ネットワークの例 (2009年米国IT系会社の取締役会のネットワーク)

## 2.2 ネットワークの定義と主要概念

ネットワークはノード (nodes, vertices) とリンク (edges, links) の集合からなる。 $n$  個のノードからなる集合を  $N = \{1, 2, 3, \dots, n\}$  とし、各ノードに番号  $i$  をつける。つまり、 $i \in N$  である。ノード  $i$  とノード  $j$  との関係を変数  $g_{ij}$  で表現する。 $g_{ij} = 0$  であるとき、これらのノード間には何の関係もない。ノード  $i$  の行動がノード  $j$  に何らかの影響を与えるときは、 $g_{ij} \neq 0$  である。ここでは、 $g_{ij} \in \{0, 1\}$  を仮定する\*4。

ネットワークの分析理論は数学ではグラフ理論 (graph theory) と言う。ノードの個数と各ノード間の依存関係が与えられるとき、一つのグラフが記述される。これをグラフ (ネットワーク)  $G = (N, g)$  と標記する。 $g$  は実数値の  $n \times n$  行列で、 $(i, j)$  要素が  $g_{ij}$  となる。行列  $g$  は隣接行列 (adjacency matrix) と呼ばれる。 $G$  を  $n$  個のノードを持つすべてのグラフの集合とする。

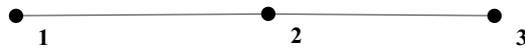
\*4 依存関係に方向性があるとき、例えば、 $i$  から  $j$  への依存性はないが、 $j$  から  $i$  への依存関係があるとき、 $g_{ij} = 0, g_{ji} = 1$  である。これをリンクが方向付けられたネットワークという。一般的には、依存関係の強弱は数値 1 以下の実数値で表現できる。

### 例 2.1

例えば、 $n = 3$  のとき、

$$g = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

と与えられているとする。 $g_{12} = g_{21} = 1$ ,  $g_{23} = g_{32} = 1$ ,  $g_{13} = g_{31} = 0$  となっている。ノード 1 と 2 の間と、ノード 2 と 3 の間にリンクがあるが、ノード 1 と 3 の間にはリンクはない。この隣接行列はノード 1、2、3 が一直線上に並んで隣接しているネットワークを表現している。



ノード  $i$  と直接的な連結関係を持つすべてのノードの集りを  $N_i(g) = \{j \in N | g_{ij} = 1\}$  で表記する。 $N_i$  をノード  $i$  の隣人 (neighbors) という。 $\eta_i(g) = |N_i(g)|$  はネットワーク  $g$  に所属するノード  $i$  の隣人の数を表す。 $|N_i|$  は  $N_i$  の要素の数を表現する。すべてのノードが同一数のリンク先を持つようなネットワークは、つまり、すべてのノード  $i$  に対して  $\eta_i(g) = \eta$  であるとき、正規なグラフ (regular graph) という。 $\eta = n - 1$  であるとき、完備ネットワーク (complete network) という。

ノード  $i$  に直接的にリンクされた隣人の数、 $\eta_i(g) = |N_i(g)|$ 、をノード  $i$  の次数 (degree) という。次数  $k$  を持つノードの割合 (相対頻度分布)、 $Pr(k)$ 、は

$$Pr(k) = \frac{\eta_k(g)}{n}$$

と定義される。明らかに、 $\sum_{k=0}^{n-1} Pr(k) = 1$  である。

ネットワークの典型的モデルの一つは、エルデシュとレーニイによって提案されたランダム・ネットワークである\*5。多様性を無視し、自然界の最も単純な法則に従い、つまり、ノードをランダムに結んでネットワークを構成する。最初に、ノードの総数は所与で、 $n$  とする。そこから任意に2つのノードを選び、サイコロを振って6の目 (数はどうでも良い) が出たら、このノード間にリンクを張る。それ以外の目が出たとき何もしない。(この場合、選んだノード間にリンクを付ける確率は  $p = 1/6$  である。) 再び、任意に2つのノードを選び、サイコロを振って6の目が出たら、このノード間にリンクを張る、それ以外の目が出たとき何もしない。

これを続ける・・・ $n$  回繰り返すと、ノード数  $n$  のネットワークが形成できる。これをランダム・ネットワークという。任意に選ばれたノードが  $d$  個のリンク (隣人ノード) を持つ確率は

$$Pr(d) = \binom{n-1}{d} p^d (1-p)^{n-1-d}$$

と与えられる。このとき、平均次数は  $\eta = \sum_{d=0}^{n-1} Pr(d)d = (n-1)p$  である。 $n$  が大きくなるとき、以下のよなポアソン分布によって近似できることが知られている：

$$Pr(d) = \frac{e^{-\eta} \eta^d}{d!}.$$

\*5 P. Erdős and A. Rényi(1959), On Random Graphs, *Publicationes Mathematicae Debrecen*, 6, 290-297.

$n$  個のノードから 2 個のノードを取り出すときの組合せの数は  $n(n-1)/2$  なので、形成されるネットワーク上の総リンク数の平均値は  $\frac{n(n-1)}{2}p$  となる。

以下に、ネットワークの特徴を表現する上で重要な言葉を定義する。ノード  $i$  の隣人ノードの一つが  $j$  で、 $j$  の隣人ノードが  $k$ 、 $k$  の隣人ノードが  $l$  であり、 $\dots$  等々、幾つかのノードがリンク接続しているとき ( $j \in N_i(g), k \in N_j(g), l \in N_k(g)$ )、ノード  $i$  とノード  $l$  はウォーク (walk) で連結されているという。このウォーク経路の中で異なるノードのみを経由するウォークをトレイルと言う。トレイルの中のノードがすべて異なっているとき、パス (path) という。パスは各ノード間を繋ぐリンクの系列である。パスの始まりのノードと最終のノードが同じであるとき、このパスはサイクル (cycle) になっていると言う。

ネットワークの部分集合を考え、この集合に含まれる異なる二つのノードを取り出し、このノードの間にパスが存在するとき、この部分ネットワークをコンポーネント (component) という。コンポーネントは部分ネットワークで、その中のすべてのノードが連結している最大の部分集合である。ネットワークは通常、複数のコンポーネントを含んでいる。

ネットワーク上のすべてのノードの間にそれらを連結するパスを持っているとき、ネットワークは連結している (connected) という。連結したネットワークはただ一つのコンポーネントからなる。あるコンポーネントの中から一つのリンクを削除したとき、そのコンポーネントが二つのコンポーネントに分解するならば、そのコンポーネントは最小限であるという。

二つのノードを結ぶ最短パスの距離を (geodesic distance) といい、 $l(i, j; g)$  と表記する。ネットワーク上にある二つのノード間の距離は通常、この最短距離 (測地距離) のことをさす。ネットワーク  $g$  において、 $N_i^d(g), d = 2, 3, \dots$  はノード  $i$  から距離  $d$  で到達するノードの集合を表現する。よって、 $|N_i^d(g)|$  はノード  $i$  から距離  $d$  にあるノード数を表す。ネットワーク上の任意の二つのノード間の最大距離をネットワークの直径 (diameter) という。直径 =  $\max_{i,j} l(i, j; g)$  と計算される。各ノード間の最短距離の平均を取った値をパスの平均距離 (average path length) という。平均距離 =  $\sum_{i>j} l(i, j; g) / \frac{n(n-1)}{2}$  である。

各ノードがネットワーク上でどれくらいの重要性を占めているかを測る計数として中心化 (集中化) 度 (centrality) という概念を使う。中心化度は 4 種類の統計量、次数、近接性、中継性、および隣人などの統計量に従って計測することが出来るので、異なる 4 種類の定義が存在する。例えば、ノード  $i$  の次数中心化度 (degree centrality)  $C_d(i; g)$  は、このノードの次数を最大可能な次数で割った値をいう。

$$C_d(i; g) = \frac{\eta_i(g)}{n-1}$$

中継中心化度は、Medici 家の例で説明したように、各ノードがネットワークの中でどれほど重要な結節点になっているかが大きな意味を持つ。ノード  $i$  とノード  $j$  を結びつける最短距離のパスの総数を  $P(i, j)$  と表記し、これらのパス経路の中にノード  $k$  が含まれているパス経路数を  $P_k(i, j)$  と表記する。中継中心化度 (betweenness centrality) を

$$\sum_{i \neq j, k \notin \{i, j\}} \frac{P_k(i, j)/P(i, j)}{(n-1)(n-2)/2}$$

と定義する。分母の値  $(n-1)(n-2)/2$  はノード  $k$  以外 (つまり、 $n-1$  個のノード) から二つのノードを取り出す組合せの総数である。

ネットワークがどの程度の群れになっているかを測る計数として群集化という概念が使用される。ネット

ワーク  $g$  でノード  $i$  の群集化係数 (*clustering coefficient*)、 $Cl_i(g)$ 、は

$$Cl_i(g) = \frac{\sum_{j \in N_i(g)} \sum_{k \in N_i(g)} g_{jk}}{\eta_i(\eta_i - 1)} = \frac{\sum_{j < k, j, k \in N_i(g)} g_{jk}}{\eta_i(\eta_i - 1)/2}$$

と定義される。この値は隣人の中で互いに隣人同士になっている割合を意味する。ランダム・ネットワークでは、中心化度及び群集化係数は  $p$  となることも自明である。

## 2.3 現実社会でのネットワークの特徴

社会ネットワークの研究で最もよく知られている例はスモール・ワールド (*small worlds*) という言葉で表現されているモデルであろう。スモール・ワールドという言葉が意味することは、現実の社会ネットワークではネットワークの直径が想像されるよりもはるかに小さく、パスの平均距離が短いという事実である。Milgram(1967)<sup>\*6</sup>は、現実社会におけるネットワークのパス距離がいかほどかを調べるために実験を行った。ネブラスカに住む住人96人を電話帳から任意に選び、彼らに封書を送った。封書の中には、ハーバード大学名入りの”パスポート”が封入されていて、これをMilgramの(ボストンに住む)友人(A氏とする)に送り返すような願い書が入っていた。この友人A氏に関する情報は住所と職業だけが開示されていた。封書を受け取った人々は、A氏を直接・間接に知っているであろうと予想される友人に、あるいは同じ職業に就いている友達に、”パスポート”を送ることを要請された。これを受け取った人々も同じように行動することが要請されていた。この結果、18個の”パスポート”がA氏のもとに届いた。平均的に5.9回の転送を経由して届いたことが判明した。

一般的に、人々が平均的に100人の友人・知人を持っているとすると、友人の友人数は10000名となる。従って、友人の友人の友人の数は100万人となる。人々が平均的に  $d$  個のリンク(友人)を持っていると、距離6のパスによって到達可能なノード数は  $x = d^6$  である。 $x = 2000000000$  (人口が2億人)とおくと、米国の人々の平均的友人数は約35.5人となる。

スモール・ワールド・モデルはWatts and Strogatz(1998)<sup>\*7</sup>によって定式化されており、スモール・ワールド性がWWWネットワークにおいても観測できることがWatts(1999)<sup>\*8</sup>によって確認されている。

以下の表は生物学、経済学、数学、物理学における論文の共著者のネットワークを調べた結果である<sup>\*9</sup>。

項目	生物学	経済学	数学	物理学
ノード総数	1,520,521	81,217	25,3339	52,909
平均次数	15.5	1.7	3.9	9.3
パスの平均距離	4.9	9.5	7.6	6.2
最大コンポーネントの直径	24	29	27	20
平均群集化	0.09	0.16	0.15	0.45
最大コンポーネントのシェア	0.92	0.41	0.82	0.85

<sup>\*6</sup> Milgram, S.(1967), The Small World Problem, *Psychology Today*, 2, 60-67.

<sup>\*7</sup> Duncan J. Watts and Steven H. Strogatz(1998), Collective Dynamics of 'small world' Networks, *Nature*, 393, 440-442.

<sup>\*8</sup> Duncan J. Watts(1999), *Small Worlds: The Dynamics of Networks between Order and Randomness*, Princeton University Press.

<sup>\*9</sup> 表の値は Matthew O. Jackson(2008), *Social and Economic Networks*, Princeton University Press. の58ページから引用。

これら4領域の中で、経済学での論文著者のネットワークは、平均次数が最も小さく、パスの平均距離が最も長く、最大コンポーネントの占めるシェアが最低になっている。生物学のネットワークは、平均次数が最大であり、平均群集化度が最も低く、最大コンポーネントのシェアが最大となっている。生物学の研究は多数の研究者による共同研究が非常に多いといえる。それに比較して、経済学の研究は一人あるいは少数の研究者による研究が多い。平均群集化度が最も大きいのは物理学であり、その値は0.45である。この値は、ランダムネットワークが生み出す群集化度の大きさと比較して、非常に大きな値だと言える。物理学のネットワークでは、ノード数が52909、平均次数が9.3だから、ランダム・ネットワークでこの平均次数を生み出すためには、各リンクが生成される均一確率は $9.3/52908 = 0.00018$ でなければならない。この値は0.45と比べると桁違いに小さい。

以下の表は、1970年代から1990年代にかけて *EconLit* に収録された経済学論文の著者のネットワークの特徴を分析した *Goyal, et al.(2006)*<sup>\*10</sup> の研究結果を示したものである。

項目	1970s	1980s	1990s
著者総数	33,770	48,608	81,217
平均次数	0.894	1.244	1.672
(標準偏差)	1.358	1.765	2.303
最大コンポーネントのサイズ	5253	13808	33027
最大コンポーネントのシェア	15.6%	28.4%	40.7%
準最大コンポーネントのサイズ	122	30	30
単独著者の総数	16,735	19,315	24,578
単独著者のシェア	49.6%	39.7%	30.3%
群集化係数	0.193	0.182	0.157
最大コンポーネントにおける平均距離	12.86	11.07	9.47
(標準偏差)	4.03	3.03	2.23

1970年代に発表された論文の著者(ノード)数は33,770で、1990年代の著者数は81,217となり、2倍以上に拡大している。平均次数は0.89, 1.244, 1.672というように非常に小さい。巨大コンポーネントの占めるシェアが15.6%から40.7%へと拡大し、その平均距離は縮小傾向にある。つまり、スモール・ワールド化している。群集化度は一貫して低い値をとっている。1970年代では、平均次数が0.894、群集化度は0.193であった。同じ平均次数を持つランダム・ネットワークで群集化度を計算すれば、 $0.84/33769=0.000026$ となる。現実に観察された群集化度は0.193であるから、ランダム・ネットワークでの計算値に比べて1万倍となっている。これらのデータは、現実のネットワークのリンクは合理的な意思のもとで、あるいは戦略的、相互依存関係を背景に形成されていることを示している。ネットワークの形成が必ずしもすべてランダムには形成されていないことを意味する。

*Goyal, et al.(2006)*によれば、観測された次数分布はランダム・ネットワークが生成するポアソン分布に比較して、かなり大きな分散を持つ。*Jackson and Rogers(2007)*<sup>\*11</sup>がより鮮明に描き出したように、現実の

<sup>\*10</sup> Sanjeev Goyal, Marco J. van der Leij, and José Luis Moraga-González(2006), Economics: An Emerging Small Worlds, *Journal of Political Economy*, 114(2), 403-412.

<sup>\*11</sup> Matthew O. Jackson and B. W. Rogers(2007), Meeting Strangers and Friends: How Random are Social Network?, *American Economic Review*, 97(3), 890-915.

社会ネットワークにおける次数分布はべき乗則分布 (power law) に近い分布をしていると言える。べき乗則分布は

$$Pr(d) = cd^{-\gamma}$$

と記述できる。ただし、 $\gamma > 1$  で、 $c$  は正の定数である。Jackson and Rogers(2007) は以下のようなべき乗則分布の現実妥当性を検証した。

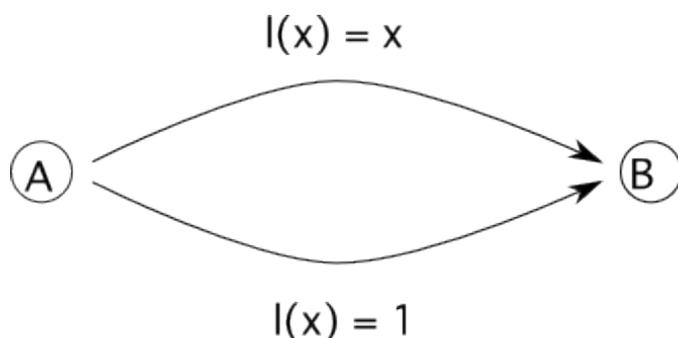
$$Pr(d) = 1 - (rm)^{1+r} (d + rm)^{-(1+r)} .$$

ここで、 $m$  は平均次数、 $r$  はランダムネスを表現するパラメーターである。この研究は、社会経済ネットワークにおけるリンクの形成が、ポアソン分布に従うように全く不規則にランダムに形成されている訳ではないが、ある種の戦略的な意思のもとで、ある程度の不規則性を持ちつつも形成されている事実を明らかにした。

### 3 交通ネットワークのモデル

#### 3.1 交通ネットワークにおけるゲーム

ネットワーク・ゲームの例として、交通均衡問題を取り上げる\*12。地点 A から地点 B に到達するには、二つの道路を経由して行ける。道路 1 を経由したとき、交通量が  $x_1$  であるならば通過時間は  $l_1(x_1) = x_1$  となる。他方で、道路 2 を経由したときには、交通量が  $x_2$  であるとき、交通量に関わりなく通過時間は  $l_2(x_2) = 1$  である。地点 A から地点 B に行きたいドライバーはできるだけ短時間で到達したいと思っている。各ドライバーがどのルートを選ぶかは、他のドライバーがどのルートを選択するかに依存する。ドライバーが区間  $[0, 1]$  に一様に分布しているとして、交通量総計は 1 であるとする。  $N = [0, 1]$ ,  $S = \{ \text{道路 1, 道路 2} \}$ 。各ドライバーはプレイヤーの集合で無限小に小さい。各プレイヤーは自分以外のドライバー全員をゲームの相手と考える。このゲームのナッシュ均衡は各プレイヤーが道路 1 を選択すること、つまり、 $x_1 = 1, x_2 = 0$  である。これがナッシュ均衡となる理由は以下の通りである。各ドライバーが  $x_1 < 1$  であると予想する限り、 $l_1(x_1) = x_1 < 1 = l_2(x_2)$  なので、道路 1 を経由した方が短時間で地点 B に到達できるので、道路 1 を選んで行こうとする。また、すべてのドライバーがナッシュ均衡に従っているとき、一人のドライバーがナッシュ均衡戦略から乖離して、道路 2 を選んで行こうとすると、このドライバーは道路 1 を選んだ方が短時間でいけることを知っているので、ナッシュ均衡から乖離する動機を持たない。



\*12 ナッシュ均衡などのゲーム論の基礎概念については、増山『ゲーム理論の基礎：ナッシュ均衡とサブゲーム完全均衡』を参照して下さい。

Fig.3.1 A Pigou example

A から B に行くために社会的に必要となる時間の総計は

$$l_1(x_1)x_1 + l_2(x_2)x_2$$

である。社会的に最適な交通量の配分を求めるために、 $x_1 + x_2 = 1$  を用いて、上の式を微分すると

$$l_1(x_1) + x_1 l_1'(x_1) = l_2(1 - x_1) + (1 - x_1) l_2'(1 - x_1)$$

となる。社会的に最適な交通量の配分は  $x_1^s = 1/2$ ,  $x_2^s = 1/2$  となり、社会的時間コストは

$$C(x^s) = \sum_i l_i(x_i^s) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$$

となる。ところで、ナッシュ均衡における社会的コストは

$$C(x^N) = \sum_i l_i(x_i^N) = 1 + 0 = 1$$

となる。明らかに、ナッシュ均衡はパレート効率的ではない。

交通問題のモデルを一般化してみる。出発点を A 点とし、目的地を B 点とするとき、ノード A とノード B を含む道路ネットワークを考える。ネットワーク上でノード A からノード B に到達するパスの集合を  $\mathcal{P}$  とし、パスの集合  $\mathcal{P}$  に含まれる任意のパス  $p$  を経由する交通量を  $x_p$  と表記する。表記法  $\{p \in \mathcal{P} \mid e \in p\}$  で、ネットワーク上のリンク  $e \in g$  を通過するパスの集合を表す。変数

$$x_e = \sum_{\{p \in \mathcal{P} \mid e \in p\}} x_p$$

は、リンク  $e$  を通る交通量の大きさを表す。リンク  $e$  の交通量が  $x_e$  であるときのリンク  $e$  を通過するために生じる遅延時間を  $l_e(x_e)$  と表現する。遅延関数  $l_e(x_e)$  はリンクの混雑度を表すもので、非負、微分可能な増加関数とする。出発点 A を通過する総交通量は 1 に規格化する。

$$\sum_{p \in \mathcal{P}} x_p = 1, x_p \geq 0$$

が成立している。言い換えると、プレイヤーの集合は区間  $[0, 1]$  である。各プレイヤーは他のドライバーと遅延時間を最短にするルート選択のゲームを行う。社会全体の遅延コストは

$$C(x) = \sum_{e \in g} x_e l_e(x_e)$$

である。ただし、 $x$  はネットワーク全体の交通量のパターンを表現する。

社会的に最適な交通量パターンは、制約条件

$$x_e = \sum_{\{p \in \mathcal{P} \mid e \in p\}} x_p$$

$$\sum_{p \in \mathcal{P}} x_p = 1, x_p \geq 0$$

のもとで、社会的遅延コスト  $C(x)$  を最小にする交通量パターンに他ならない。

ナッシュ均衡では、各ドライバーのドライブ経路は、他のドライバーの交通経路を所与としたとき、最短時間で目的地に到達できる交通経路でなければならない。だから、あるドライバーがパス  $p$  を取っているなら

ば、 $\sum_{i \in p} l_i(x_i) > \sum_{i \in p'} l_i(x_i)$  を成立させるパス  $p'$  が存在してはならない。言い換えると、ナッシュ均衡  $x$  は以下の条件、

(1) すべてのパス  $p, p' \in \mathcal{P}$  に対して、 $p > 0, p' > 0$  が満たされるとき、 $\sum_{i \in p} l_i(x_i) = \sum_{i \in p'} l_i(x_i)$  が成立すること、

(2) すべてのパス  $p, p' \in \mathcal{P}$  に対して、 $p > 0, p' = 0$  が満たされるとき、 $\sum_{i \in p} l_i(x_i) \leq \sum_{i \in p'} l_i(x_i)$  が成立することの

2条件が成立しなければならない。

交通ネットワークのナッシュ均衡点が交通量パターンのポテンシャル関数の最小化点になることが知られている。

### 定理 3.1

ナッシュ均衡  $x^{NE}$  は、制約条件

$$\begin{aligned} x_e &= \sum_{\{p \in \mathcal{P} | e \in p\}} x_p \\ \sum_{p \in \mathcal{P}} x_p &= 1, x_p \geq 0 \end{aligned}$$

のもとで、ポテンシャル関数

$$T(x) = \sum_{e \in g} \int_0^{x_e} l_e(z) dz$$

を最小にする交通パターンである。さらに、もし遅延関数  $l_i$  が厳密に増加関数であるならば、ナッシュ均衡はユニークに定まる。

各プレイヤーが遅延時間をできるだけ短くなるように経路を変更するたびごとに、このポテンシャル関数の値が減少し続ける。各プレイヤーがそれ以上遅延時間を短くすることができない状態に至るとき、ポテンシャル関数が最小になる。これが均衡点となる。このゲームのナッシュ均衡は社会的に最適な交通量パターンとはならないことを証明することができる<sup>\*13</sup>。

## 3.2 道路ネットワークと Braess の逆説

前節で導入した通り、ハイウェイ網を使用して目的地に行く、あるいはインターネット上でパケットを通信するときに直面する意思決定問題はゲーム論的な枠組みが必要である。例えば、なるべく最短時間で目的地に行きたいと思っているとき、到達時間は道路の混雑状態に大きく依存するので、どの程度の人数のドライバーがどのハイウェイのルートを経由しているのかを無視して、どのハイウェイルートを採用すべきかを定めることはできない。ネットワーク交通のゲーム論的モデルを再度取り上げる。A 地点から B 地点に行くには二つのハイウェイを経由する選択肢が存在する。C 地点を経由するルートと D 地点を経由するルートの二つがある。ハイウェイを有方向グラフで表現し、ハイウェイの始点（あるいは終点）をノードで表現する。リンク上に表示された数値は  $x$  台の自動車が高ウェイを通過するための必要時間である。ノード AD とノード CB は走行する車両数に依存せず、45分必要である。ノード AC とノード DB は、 $x$  台の車両が走行すると、通過

<sup>\*13</sup> ポテンシャル関数については、Easley and Kleinberg(2010) の第8章を参照のこと。David Easley and Jon Kleinberg(2010), *Networks, Crowds and Markets: Reasoning about a High Connected Worlds*, Cambridge University Press.

するために必要な時間は  $x/100$  分となる。4000台の自動車が毎朝地点 A から B 地点に向かって走る必要があるとする。すべての自動車が地点 C (あるいは D 地点) を経由するとき、 $4000/100 + 45 = 85$  分かかる。半数の自動車が C 地点、残り半数が D 地点を経由すれば、各自動車は  $2000/100 + 45 = 65$  分で通過できる。

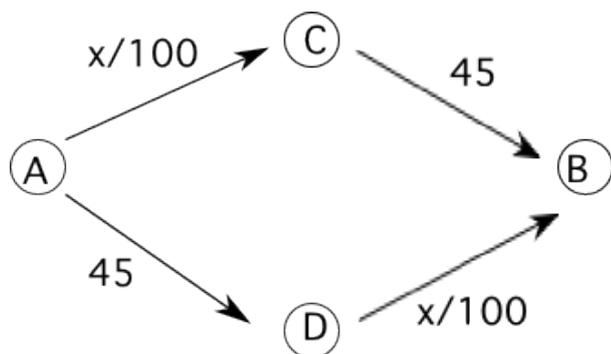


Fig.3.2 A highway network

各ドライバーが互いにどのルートを選択するかという問題を考える。この問題のナッシュ均衡は、半数のドライバーが C 地点経由を採用し、半数のドライバーが D 地点経由を選択するときである。この戦略は他のドライバーが自身の戦略を変更しない限り、自分の戦略を変更する動機がない。x 人のドライバーが上のルートを選択すれば、下のルートには  $4000 - x$  台の自動車が走るのも、もし  $x < 2000$  ならば、D 点を通るルートはより長い時間がかかる。D 点を経由しているドライバーは C 点を経由するルートに変更する動機を持つ。x = 2000 でない限り、ナッシュ均衡ではない。

混雑解消のために、政府が C 点と D 点を結ぶ道路を建設したとき、何が起こるだろうか。簡単化のために、この道路は制限速度なしの巨大な道路で、通過時間がゼロであるとする。この道路の建設によって、A から B に到達する時間が短縮されると予想されるが、その予想は裏切られる。これを Baess の逆説という。この道路網におけるナッシュ均衡は、各ドライバーが C-D を経由するルートを選択する戦略となる。このとき、A から B への到達時間は  $4000/100 + 4000/100 = 80$  分となる。他のドライバーが C-D 経由の戦略を選択しているとき、これ以外のルートを選択すると、 $45 + 4000/100 = 85$  分となる。だからナッシュ均衡から離脱する動機が存在しない。また、これ以外の均衡は存在しない。2000台の車が A-C のルートを選択するとき、彼らはすべて C-D 経由のルートを選ぶ。そうしたとき、A-D 経由を選択するならば、到達時間は 85 分となる。道路建設以前のナッシュ均衡は均衡として成立しない。このことは、新しい道路の建設は道路混雑をさらに悪化させ、(65分で A から B に到達できた) 以前のナッシュ均衡に戻ることを不可能とする。

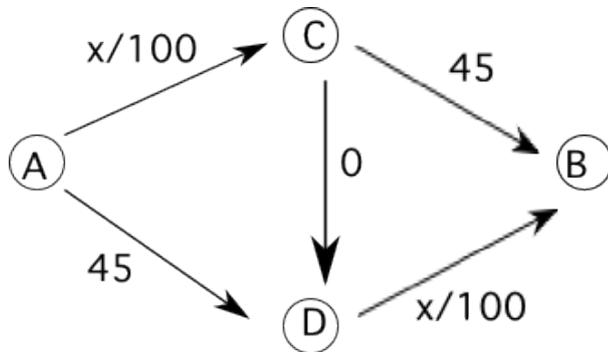


Fig.3.3 A highway network with added route

Baess の逆説はネットワーク交通の社会的最適性問題を分析する出発点である。上で説明した通り、ネットワーク交通において、追加的なリンクの連結は必ずしもネットワークの均衡状態を改善するとは限らない。また、ネットワーク・ゲームにおいて、自己利害に基づく意思決定から導出されるナッシュ均衡点は社会的効率性からみても望ましいものではない。

## 4 取引ネットワークのモデル

### 4.1 2項グラフにおける割当問題

最初に 2 項割当問題を考える<sup>\*14</sup>。学生寮の管理者が入学者に部屋を割り振る問題を考える。2 項グラフ左側のノードは学生寮の部屋からなり、部屋番号のラベルが付いている。右側のノードは入学者からなり、それには新入生の名前が付いている。各ノードの間を結ぶリンクは、学生が入居したいと願っている部屋とその学生とを結んでいる。管理者は各部屋をその部屋に入居したいと望む学生 1 名に割り振らなければ、すべての部屋と学生とを 1 対 1 にマッチングできない。管理者は各ノードに接続するリンクを一本だけ選択し、それ以外のリンクを削除して、すべてのノードにただ一本のリンクだけが接続されているネットワークを作成する必要がある。この例では、部屋 101 に次郎、部屋 102 に三郎、部屋 103 に太郎、部屋 104 に花子、部屋 105 に桃子を割り振ると丁度うまい具合に、部屋と学生が 1 対 1 にマッチングするネットワークができる。これを完全なマッチングという。

完全なマッチングとなっている割当ネットワークは、2 項グラフの両サイドにあるノード数が同一であるとき、以下の 2 条件を満たす。(1) 各ノードは割当てられたノードとリンクで接続されている。(2) 2 項グラフの右側に位置する各ノードとリンクされている左側にあるノードは複数個存在しない。つまり、完全なマッチングでは、各ノードのリンク先のノード数がただ一つになるようにリンク接続が選択されている。与えられた 2 項グラフが完全なマッチングを持つならば、その完全なマッチングを作成することは容易に示せる。

<sup>\*14</sup> この問題は、ゲーム理論では、マッチング・ゲームおよび割当問題と呼ばれている。ここでは、提携形ゲームや交渉ゲームなどの協力ゲーム理論の知識を前提としない説明をする。

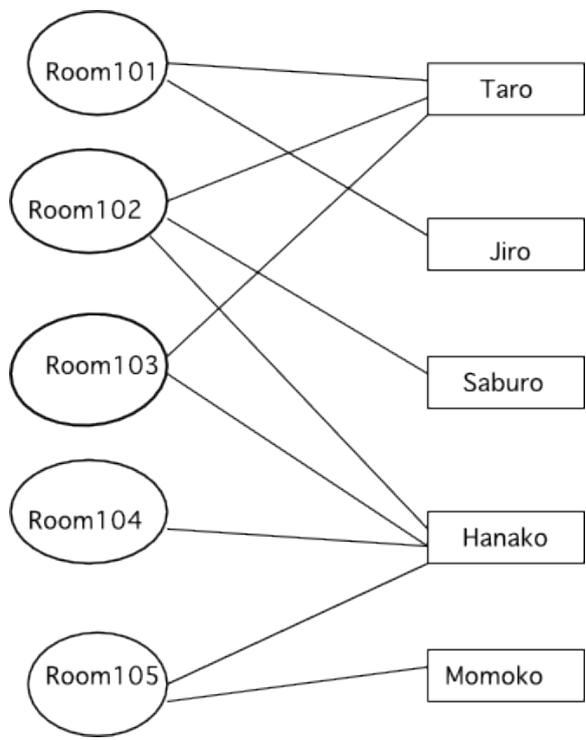


Fig.4.1 割当問題 1. 学生寮の部屋割当問題

しかし、2項グラフが完全なマッチングを持たないケースでは、完全なマッチングを作成できないという事実をどのようにすれば証明できるのだろうか。2項グラフにおいて、ある種の性質を持つノードの集合を考えることができる。これは圧縮された集合 (a constricted set) と呼ばれる集合で、「Fig. 割当問題 2. 圧縮集合の例」に見られるように、太郎、次郎、三郎の3人からなるノードの集合である。この3人が入居を希望する部屋は 101 と 102 の2部屋である。2部屋に3人を割当ててすることは不可能である。完全なマッチングは不可能である。圧縮された集合と呼ばれる理由は、このような性質の集合が存在することが完全なマッチングの形成を制約するからである。一般的に圧縮された集合の定義は次のようになされる。2項グラフの右サイドにある任意のノードの集合を  $S$  とするとき、集合  $S$  に属するノードとリンクされている左サイドの隣人ノードの集合を  $N(S)$  とする。集合  $S$  に含まれるノード数が集合  $N(S)$  のノード数より厳密に大きいならば、集合  $S$  は圧縮されているという。圧縮された集合が存在する限り、完全なマッチングは形成できない。

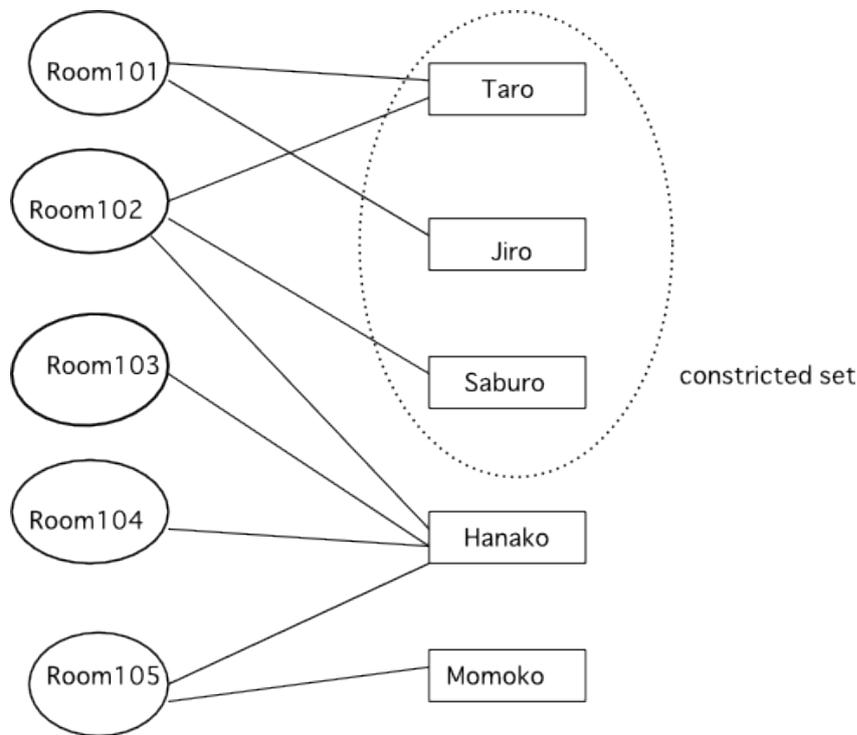


Fig.4.2 割当問題 2. 圧縮集合

従って、圧縮された集合が存在しなければ、完全マッチングを見いだすことができる。こうして結婚定理 (marriage theorem) として有名な以下の定理が成立つ\*15。

#### 定理 4.1 (結婚定理)

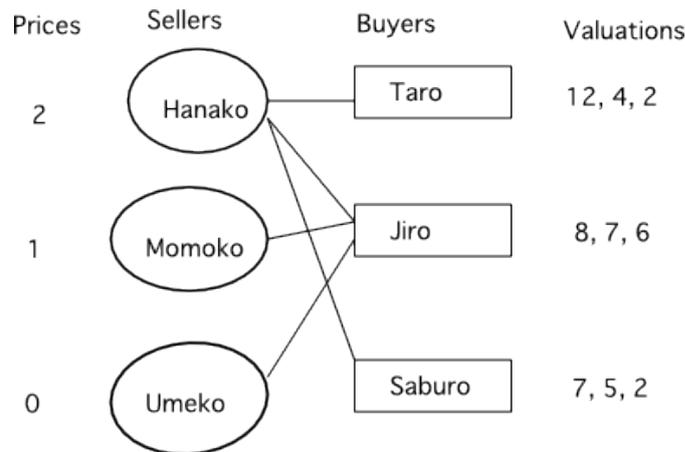
2項集合  $\{A, B\}$  を持つ 2項グラフ  $G$  において、集合  $A$  が完全マッチングを持つための必要十分条件は、すべての  $S \subseteq A$  に対して、 $|N(S)| \geq |S|$  が成立することである。ただし、 $|S|$  は集合  $S$  の要素数である。

圧縮された集合が存在するとき、実際には、市場でどのようにマッチングが実現されているのだろうか。この問題を考察するためには、人々の選好や評価価値に関わる概念の役割を導入する必要がある。例として、住宅の売買を考えてみる。住宅を売却したい人と購入したい人が同数存在すると仮定する。買手  $j$  ( $j = 1, 2, 3, \dots$ ) が、売手  $i$  ( $i = 1, 2, \dots$ ) が売ろうとしている住宅に対して付ける価値は  $v_{ij}$  であるとする。簡単化のために、売手の自己の住宅に付ける価値はゼロであるとする。売手  $i$  は住宅市場で価格  $p_i \geq 0$  を提示して自分の住宅を売ろうとする。買手  $j$  が売手  $i$  のこの住宅を購入したとき、買手の利得は評価価値 - 支払額 =  $v_{ij} - p_i$  となる。各買手はこの利得が最大になるような住宅を購入しようと努力する。当然、この利得がゼロ以下になるときは購入しない。

買手  $j$  の利得  $v_{ij} - p_i$  を最大化する売手  $i$  が買手  $j$  に選好された売手となり、この両者のノード間にリンクを張る。花子が付けた価格が 2、桃子が付けた価格が 1、梅子が付けた価格が 0 になっているときの例が以下のグラフで表されている。下のグラフの例で、Valuations の列に書かれた (例えば、太郎の右側の) 値は、花子、桃子、梅子の順番でそれらの住宅に対する評価額を表す。太郎は花子の住宅を 1 2、桃子の住宅を 4、

\*15 この定理の証明については、Diestel(2010) や Bollobas(1998) などのグラフ理論のテキストを参照のこと。LP 問題を利用した証明は、Gale(1960) によって与えられている。

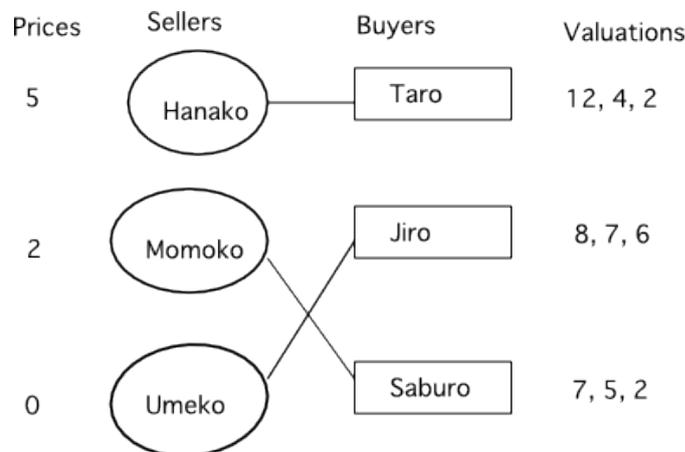
梅子の住宅を2と評価している。太郎が花子から住宅を買うときの利得は $12 - 2 = 10$ 、桃子から買うとき $4 - 1 = 3$ 、梅子から買うとき $2 - 0 = 2$ なので、太郎により選好された売手は花子となるので、太郎と花子の間にリンクが接続される。次郎が花子から買うとき $8 - 2 = 6$ 、桃子から買うとき $7 - 1 = 6$ 、梅子から買うとき $6 - 0 = 6$ となり、次郎にとって花子から買うのも、梅子から買うのも、梅子から買うのも同じ利得となり、無差別である。3本のリンクが張られる。三郎の利得は花子から買う時に最大になるので、三郎と花子の間にリンクが張られる。これを選好された売手グラフという。



(b) Not-market clearing prices

Fig.4.3 住宅売買 (a) 市場不均衡価格

この場合、明らかに、太郎と三郎からなる集合は制約された集合となり、完全マッチングが成立しない。つまり、市場での住宅取引で住宅を売れない売手と、買えない買手が出てしまう。2項グラフで選好された売手と買手が一対一になっているとき、すべての売手も、すべての買手も希望どおりに取引を実現できている。この場合、住宅市場でのすべての取引は清算されている。市場均衡価格が成立しているということもできる。花子が売値を5に、桃子が2に増加させると、どうなるでしょうか。この結果は下のグラフに示される。



(a) Market clearing prices

Fig.4.4 住宅売買 (b) 市場均衡価格

選好された売手のグラフで、完全マッチングが成立するとき、市場が均衡しているという。市場均衡を実現させる価格はただ一つとは限らない。たとえば、花子が売値を 3、桃子が 1、梅子が 0 としたとき、完全なマッチングを形成することができるので、これも市場均衡となる。(読者の練習問題とする。) 売手と買手の数が同数である 2 項グラフで、重要な事実、買手のどのような評価額の組に対しても市場均衡価格が存在することを証明できる。後にこれを証明する。さらに重要なことは、市場均衡価格が社会的に最適な資源配分を実現するか否かということである。この問題に対しては簡単に答えを与えることができる。完全なマッチングは各買手の利得を最大化している、社会的利得はその総計であるから、社会的な利得を最大化している。市場均衡価格が成立するとき、選好された売手のグラフでの完全なマッチングは社会的に最適な配分を実現している。

市場均衡価格に到達する過程は、オークションにおける価格調整のストーリーと同じである。最初に、すべての売手が価格をゼロに設定する。この価格において、各買手が選好した売手のグラフを作成し、圧縮された集合が存在するかどうかをチェックする。圧縮された集合  $S$  が見つかったら、それに対応する売手の集合  $N(S)$  を見いだす。集合  $N(S)$  に属する売手は超過需要に直面しているので、彼らの売り出している住宅の価格を 1 単位分引き上げる。この新たな価格でオークションを続ける。圧縮された集合が存在する限り、この価格引き上げの操作を繰り返す。オークションが終了するとき、到達した価格のもとで売手と買手は一対一に対応した完全なマッチングが成立している筈である。すなわち、市場均衡が成立している<sup>\*16</sup>。

## 4.2 取引ネットワークと均衡価格

金融資産市場での取引に見られるように、売手と買手は互いが直接的に相対して取引することはしない。売手と買手は取引を仲介するブローカー、中間業者、取引所などの取引業者 (traders) を介して売買を行っている。取引業者を介して行われる商品の売買ネットワークを理解するために、発展途上国などにおける農産物の取引ネットワークを例として取り上げる。流通環境の貧弱さや農産物の腐敗し易さおよび農家の貧弱な資金力などの要因により、各農家は特定の取引業者に販売する以外のすべがない。同じように、消費者は特定少数の取引業者から農産物を買うしかない。農家  $i$  は 1 単位の農産物を所有しており、それを価格  $v_i$  以上で売りたいと思っている。消費者  $j$  はその農産物の価値を  $v_j$  と評価しているので、価格  $v_j$  以下でその農産物 1 単位を買いたいと思っている。各消費者は 1 単位の農産物を購入するつもりで、2 単位以上は買いたくない。過去の取引の歴史から、各買手、売手、および取引業者はこれらの評価額をすべて知っていると仮定する。

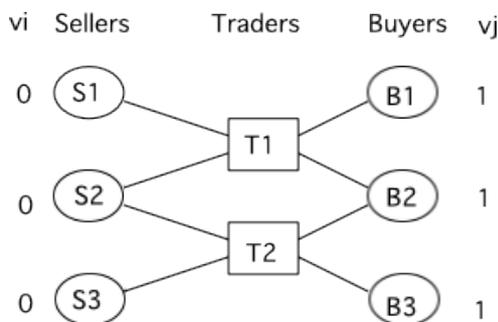


Fig.4.5 取引のネットワーク例 (a)

<sup>\*16</sup> 提携形ゲーム理論という安定集合、コアに対応する。提携形ゲームの安定集合については、増山『進化ゲームと交渉ゲーム』を参照のこと。

取引のネットワーク例では、3名の売手と3名の買手、そして2名の取引業者が存在するが、地理的な要因から、農家1 (S1) は取引業者1 (T1) としか取引できない。農家2 (S2) は取引業者1 (T1) と取引業者2 (T2) の両者に販売できる。農家3(S3) は取引業者2 (T2) としか取引できない。農家が要求する最低価格は  $v_i$  の列に明記されているように、ゼロとする。消費者が付ける評価額は  $v_j$  の列に示されてる通り、1である。簡単化のために、ここでは、各農家の評価額は同一、消費者の評価額も同一になっているが、この仮定を緩めても議論の本質は関係しない。取引は取引業者が価格を設定することから始まるゲームである。取引業者  $t$  は売手  $i$  に買値 (bid price)  $b_{ti}$  をオファーする。買手  $j$  に対しては、売値 (ask price)  $a_{tj}$  をオファーする。この取引業者のオファーに反応して、売手と買手は最適な戦略を選択する。第一段階で取引業者が戦略を選択し、第二段階で売手と買手が戦略を選択するという、2段階ゲームの構造をしている。2段階ゲームの解はサブゲーム完全均衡 (subgame perfect Nash equilibrium) として通常与えられる。

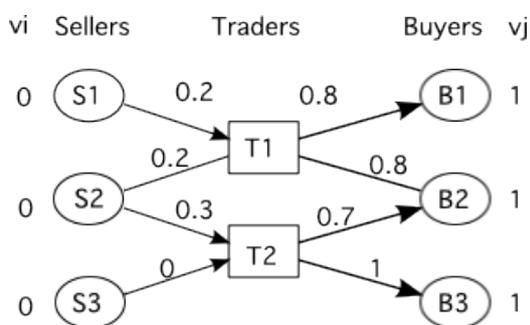


Fig.4.6 取引のネットワーク例 (b)

取引のネットワーク例 (b) では、T1 は売手1と2に価格0.2の買値をオファーし、買手1と2に価格0.8の売値をオファーしている。T2は売手2に価格0.3を、売手3に価格0をオファーし、買手2に価格0.7、買手3に価格1をオファーしている。これらのオファーを受け取った、売手1はT1に売る以外にすべがないのでT1に農産物1単位を販売する。売手2は高い価格0.3をオファーしたT2に販売する。売手3はT2に販売するしかないので、言い値通りにT2に売る。買手1はT1からしか買えないので、価格0.8で購入する。買手2はT1とT2のどちらかかでも買えるので、安い価格0.7をオファーしたT2から買う。買手3はT2からしか買えないので、価格1で買う。この結果、矢印がついた方向に農産物が販売されて行く。取引業者1の利益は  $0.8-0.2=0.6$ 、業者2の利益は  $0.7+1-0.3-0=1.4$  となっている。売手の利得は  $0.2+0.3+0=0.5$ 、買手の利得は総計で  $1-0.8+1-0.7+1-1=0.5$  である。

ここで示された各取引業者の戦略は最適な戦略になっているだろうか。T1はT2よりも低い買値を売手2にオファーした結果、売手2から商品を購入できなかった。T1がT2のオファー価格よりの高い、例えば、買値0.4を売手2に提供すれば、売手2から商品を購入できて、買手2にT2よりも安い売値、例えば、0.6を提供すれば、買手2に商品を売ることができる。この結果、取引業者1はより大きい利益を手に入れることができる。また、買手1はT1からしか買えないので、買手1に対する売値価格のオファー額を買手2と同じにする必要がない。買手1にオファーする売値を1とすることは可能である。さらに、売手1も売る相手が自分しかいないので、最低限の価格0をオファーすれば良い。このような戦略は例(b)で得られる利益を大きく増加させる ( $1+0.6-0.4-0=1.2$ )。これを描いたネットワークが下に示されている。

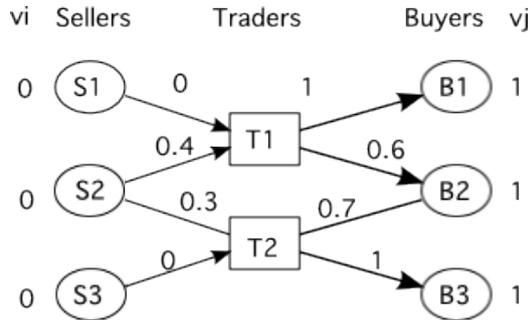


Fig.4.7 取引のネットワーク例 (c)

第一段階でのゲームは取引業者 1 と取引業者 2 との間の同時手番ゲームになっている。このゲームでは、一つの取引業者としか取引できない独占される状態にある売手や買手は考慮に入れる必要はない。売手には最低価格を、買手には評価額そのものをオファーすれば良い。複数の取引業者と取引できる環境にある売手や買手を各業者が取り合うゲームとなっている。このゲームの解はどのような性質を持つのでしょうか。ライバル業者が存在するとき、同一の買値または売値を提示しないと取引相手がライバルに奪われてしまう。各競合業者が買手（売手）に同一の売値（買値）を提示することは、競争が進展するに連れて、各業者の買値と売値は同一になり、利益がゼロに収束して行くことを意味する。言い換えると、競争均衡では、各取引業者の利益はゼロである。ただし、独占状態にある売手と買手からの利益は正となっている。この結論は、各買手の評価額が同一のケースで成立する。各買手の評価額が異なる一般的なケースでは、均衡価格はどのように形成されるのでしょうか。売手が一人の場合には、取引ネットワークにおける均衡価格は第 2 価格オークション (*second-price auction*) と同じ結果になる。この結論を証明することは簡単である。

取引ネットワークにおいて、買手（売手）と取引業者とのリンク接続が複雑化するとき、各経済主体の利得にどのような効果をもたらすのか、社会的厚生は増大するのでしょうか。この問題に答えるに当たって、以下のグラフで示された例を取り上げる。

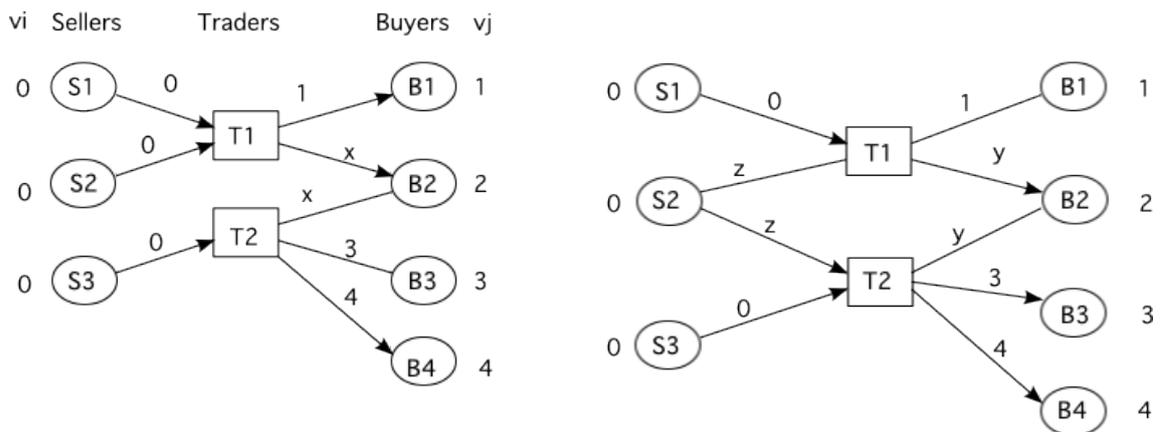


Fig.4.8 取引ネットワークにおける接続の複雑化

左側のグラフでは、売手 2 は販売先が業者  $T1$  に独占されているが、右側のグラフでは売手 2 の販売先が複数存在する。売手 2 が  $T1$  に独占されている状態では、 $T2$  は売手 2 から商品を買入れることはできない。買手 2 は両方の取引業者から購入できるので、各業者が買手 2 に商品を売るためにはライバルよりも安い価格を提

示す必要がある。売手2が複数の販売先をもつケースでは、各取引業者は売手2から商品を買入れるためには、ライバルよりも高い買値を提示する必要がある。両業者が同一の買値  $z$  を提示して、売手2が  $T2$  に販売したとする ( $T2$  は買値に若干色をつけたとする)。このとき、 $T2$  はこの仕入れた商品を買手3に価格3で販売するであろう。 $T1$  は売手1からしか商品を買入れられないので、商品に高い評価を与える買手2に売ろうとするであろう。これが取引パターンの均衡状態になる。 $T1$  と  $T2$  がオファーする買値  $z$  は1と3の間に入り、買手2にオファーする売値  $y$  は1から2の間になる。

売手2が取引業者1の販売先を独占されている状態から、売手2と取引業者2の間に取引リンクが確立されると、商品の流通経路が劇的に変化する。売手2から  $T2$  への流通経路にボトルネックが存在するとき、商品の高い価値を持つ買手3は商品を手に入れることができない。つまり、資源配分にロスが生じている。このボトルネックが解消されると、資源配分が効率化して、社会的厚生が増大する。

また、売手2から  $T2$  への流通経路のボトルネックが解消されると、売手2の販売先が拡大し、 $T2$  の購入先も拡大する。その結果、売手2と取引業者2の利益が増加する。このことは、取引業者2および売手2がこの流通経路のボトルネックを解消させる動機、言い換えると、両者の間にリンク接続を維持する経済動機が存在することを意味する。ネットワークにおけるリンク接続の戦略的形成の問題が重要となる。

### 4.3 ネットワークにおける交渉力

前節でも見たように、ネットワーク上でいかなる地位を占めるかが市場における力関係を大きく作用する。ネットワークにおける力（勢力、影響力）なる概念は社会学の研究で重要な役割を果たしてきた。大きな社会的ネットワークの中で、ある主体の力が複数の人間の間でどのような形成され、どのように作用するのかが研究されてきた。二人の主体間の社会的関係はある種の価値を両者にもたらす関係であると理解されている。経済的關係で言えば、二人が一緒に協力して生産することで経済的な価値が生み出される。生み出された価値を二者間で配分することが社会的交換といわれ、その分配におけるインバランスさが力（関係）と言われる。こうした社会的交換における力、交渉力、影響力の源泉が社会的ネットワークの構造に起因すると見なす理論はネットワーク交換理論と呼ばれている。この理論で採用されている主要概念は、従属性 (*dependence*)、排除性 (*exclusion*)、飽和性 (*satiation*)、そして中継度性 (*betweenness*) である<sup>\*17</sup>。これらの要因が社会的交換においてどのように作用しているのか、どのように重要な役割を果たしているのかを、被験者を用いた人工的実験によって確かめようとする研究が行われてきた。

この実験で想定されたネットワークは、以下の図で示されるように、ノード数が2から5つまでの単純なネットワークである。

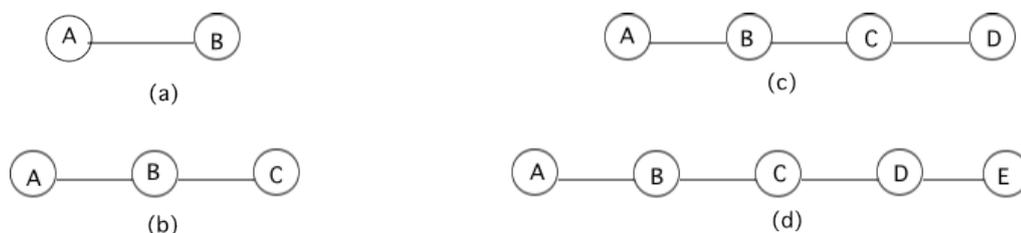


Fig.4.9 社会交換ネットワークの例

\*17 詳細は、Easley and Kleinberg(2010) を参照のこと。

実験は以下のように行われる。ネットワーク上のノードの位置に被験者をおき、ノード間の各リンク（枝）に、例えば、1万円を配る。リンクで接続した2者間でこのお金の配分を決めさせる。各ノードは、隣接するノードとお金の配分を交渉し、合意すれば配分通り1万円を分配して受け取れる。交渉は何度繰り返しても良い。しかし、最終的には、一人の隣人ノードとだけのみ合意可能で、配分通りのお金を受け取れる。一人の隣人と合意したとき、その隣人以外のノードとは取引できない。

ノード数が2のとき、理論的に予想されるのは、均等な分配である。実験でも、近似的に、理論通りの結果が得られている。3人からなるネットワークでは、理論上は、個人Bは個人Aや個人Cよりも交渉力が大きいと予想される。なぜなら、BはA(C)と合意することが嫌なら、C(A)と交渉する機会が残っているが、AやCは交渉相手としてBしかいない。実験によると、Bは非常に多くの割合で配分を受け取る、約5/6の大きさを受け取ることが知られている。4つのノードからなるネットワークでは、BはAおよびCと交渉できる一方で、CがDと合意して、Cから排除される可能性もある。3人ネットワークに比較して、Bの立場は弱くなっている。実験によると、A-Bの交渉は、Bが7/12から2/3の間での配分を得るといふ。5人からなるネットワークでは、Cはネットワークの中心に位置するが、交渉力は弱い。なぜなら、交渉相手のDがEと交渉して合意する可能性を有しているからである。Cはネットワークの中心に位置するからと言って、BやDのような強い立場を維持できる訳ではない。CはAおよびEよりも少しだけ強い立場にいと云える。

以上の社会交換ネットワークは、市場での売手と買手の取引ネットワークと解釈することができる。この場合、売手と買手の間の価格交渉の問題になる。ただし、1単位の商品の取引と1回だけの取引が想定されているので、複数単位の取引や反復する取引の場合には修正が必要となる。

ゲーム理論では、交渉ゲーム (bargaining game) の解がナッシュ交渉解として与えられる<sup>\*18</sup>。AとBが1万円を交渉して配分しあう問題を考えてみる。交渉決裂したとき、Aがこの交渉に合意しなければ得られる留保利得が $x$  (万円)、Bの留保利得が $y$  (万円) であるとする。 $x + y < 1$  でなければ、交渉の意味がない。Aは少なくとも $x$ を最低限要求し、Bも $y$ 以上を要求するので、剰余 $s = 1 - x - y > 0$ をいかに分け合うかが問題となる。交渉力が均等であるときは、この剰余 $s$ を均等に分け合うことに合意するでしょう。つまり、Aは $x + s/2$ を、Bは $y + s/2$ を受け取ることに合意する。これが、ナッシュ交渉解の出発点である。

3人ネットワークの実験は、中心に位置する主体が圧倒的な割合の配分を受け取る訳ではなく、5対1の比率で分け合うことを示している。単純な理論的予想とは一致しない。これを説明するために、最後通告ゲーム (ultimatum game) を取り上げることが必要である。最後通告ゲームは以下のルールに従って行われる。

1. 個人Aが1万円を渡され、個人Bと分け合うことを要請される。Aは、1万円のうちどれほどをBに分け与え、自身がどれほどを受け取るかを、Bに提案する。
2. 個人BはAによって提案された配分案を受け入れるか、拒否するかを選択する。
3. BがAの提案を受諾すれば、Aの提案とおりに1万円を分け合うことができる。しかし、Bが拒否したとき、Aは1万円を返却し、両者とも何も得られない。

この1回限りのゲームで、どのような配分がゲームの解となるであろうか。各個人が自分の受け取る貨幣額を最大化することを目的として行動すると仮定しよう。このとき、個人Bは、個人Aが小額の配分額をBに配分する提案を受け取るとき、それを拒否するよりは、受諾する方が効用を大きくするので、Aのそのような提案を受諾するだろう。だから、個人Aは、Bの行動を予想して、ほんの少量の金額を個人Bに渡し、自分が

<sup>\*18</sup> 交渉ゲームの解については、ゲーム理論のテキスト、例えば、標準的なテキストとして、岡田 章『ゲーム理論』有斐閣などを参照のこと。

ほとんど全部の金額を手に入れようとするだろう。この観点から見れば、個人 A は絶大な権力を持っているのに対して、個人 B は受け身的な立場にしかない。ところが、被験者を使った最後通告ゲームの実験結果によれば、通常、人々の行動はこの理論的予測とは整合的な行動を取らない結論に到達した<sup>\*19</sup>。個人 A の役割をする被験者は、平均的には、均等に近い配分案を提示する、特に、全体の 3分の1 は平等な配分案をオファーする事実が判明した。また、B にとって極端に不平等と思えるような配分案は B によって拒否されると言う事実も分かった。

このような実験観察の結果をゲーム論的分析枠組み内で整合的説明することができるのでしょうか。この問題を解決する幾つかの方法があるが、最も単純な想定は、入手できる貨幣額のみならず、公平な取り扱いを受けた度合いも個人の効用関数の変数になっていると仮定することである。この場合には、極端に低い配分を提案されるとき、B は不公平な取り扱いを受けたという否定的な感情を抱き、提案を拒否する行動を取ることになる。ネットワーク上で隣接するノード間での配分交渉問題を考えるときには、このような視点が必要となる。

ネットワーク上にあるすべてのリンクに 1 万円が渡されていて、リンクで接続されているノード間での配分交渉問題を考える。合意形成ができなかったリンク上の 1 万円は没収される。ネットワーク上で配分交渉問題を分析するためには以下の 2 要素を特定することが必要である。一つは、ノードの集合上におけるマッチング、つまり、どのノードとどのノードが配分案に合意するかを確定することである。簡単のために、一対一でのみ配分案は実現するとする。第二に、交渉により、各ノードがどれほどの価値を手にしたかを特定しなければならない。交渉問題の実現結果は、安定性の観点と、バランスしていると言う簡単から分析する必要がある。

簡単なネットワークにおける交渉結果の例を下のグラフに示す。各ノードの上に明記されている数値は、太い実線のリンク接続で結ばれたノード間で合意された配分結果の取り分である。

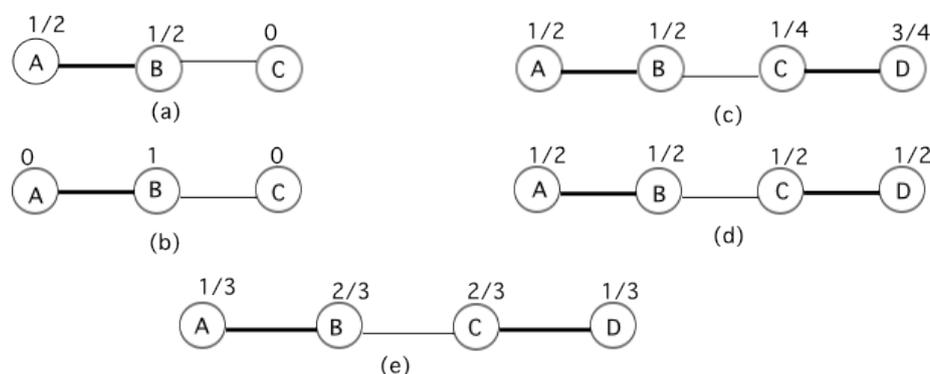


Fig.4.10 配分交渉の結果

配分交渉の結果が例 (a) で与えられるとき、個人 C は何もできないでしょうか。例えば、C が自身は  $1/3$  をとり、残りの  $2/3$  を B にあげるといふ提案を B にオファーすると、B は喜んでこの C の提案を受けるとしよう。すると、A と B との間で  $1/2$  と  $1/2$  に配分する提案は B に拒否されることになる。結果の例 (a) は不安定な配分提案である。すなわち、C が隣接するノード B に対して、B と C の利得を共に増加させるような配分提案が存在するとき、不安定な配分結果であると言う。B と C の間で  $2/3$  と  $1/3$  に分け合う配分も不安定である。なぜなら、A は B に対して、 $1/4$  と  $3/4$  で分け合う配分案を提案すると、両者とも利得が増加できる。例

<sup>\*19</sup> この結果については、Guth, Schmittberger and Schwarze(1982)、Thalor(1988) を参照のこと。

(b)に見られる配分結果は不安定ではない、何故なら、 $C$ は $B$ に対して $B$ の利得を増加させる提案をオファーすることができない。例 (b) は安定な結果である。同じようにして分析すると、例 (c) は不安定な結果であるが、例 (d)(e) は安定な結果となっている。

上の例で見られる通り、安定な配分交渉問題の結果は複数個存在する。安定な結果のうち、実際に実現する結果はいかなる性質を満たすのだろうか。協力ゲーム理論によれば、交渉ゲームの結果はナッシュ解で与えられる。つまり、隣接するノード間の配分問題はナッシュ解で与えられる。この場合、各ノードの外部的オプションの価値は、考慮している配分交渉の当該ノード以外の隣接するノードとの配分から予想できる受取額になる。上の例 (e) を見てみると、個人  $A$  は  $B$  との間の配分交渉以外に外的な価値を得る機会はないので、外的な留保価値はゼロである。これに対して、 $B$  は  $C$  と配分交渉する機会があるので、外的な留保価値は  $1/3$  である。ナッシュ交渉解では、 $A$  に  $1/3$ 、 $B$  に  $2/3$  を配分することになる。各ノードの配分額がナッシュ交渉解と同一になっている配分結果はバランスした結果と言われる。例 (e) に見られる結果はバランスした配分結果となっている。

## 5 情報カスケードとネットワーク効果のモデル

### 5.1 情報カスケード

人々がネットワークで結ばれているとき、各個人の意思決定がネットワーク上の他の人々の情報や意思決定に大きく影響される。旅行中に立ち寄った町で食事をするとき、その町にあるレストランの情報をインターネット上から得ていたとしよう。その情報に基づいてレストラン  $A$  で食事をすることにして、レストラン  $A$  の前に来たが、誰もお客がいなかった。隣にあるレストラン  $B$  には多数のお客がいて、楽しそうに食事をしていた。レストラン  $B$  にいる客は自分たちと同じ情報を持っていて、食べ物の好みもそれほど変わらないとするならば、レストラン  $A$  に行くことをやめて、レストラン  $B$  で食事をとることが合理的な行動になる。この場合、各旅行客は二つのレストランの評価に関して、独立なそして不完全な情報を前もって持っているが、多数の客がレストラン  $B$  で食事を楽しんでいる事実を観察することから得られた情報の方がインターネットから得られた情報に比較してより有効な価値を持っているということになる。このような現象を群集化、情報カスケード (information cascade) という。情報カスケードという概念は、ファッションや流行、人気候補者への投票行動、ベストセラーリストに乗った本に対する評価、新製品の選択などの、社会ネットワーク上における人々の群集化や模倣行為を説明する上で非常に有効となる。

他者の行為を模倣する合理的な誘因は、こうした情報カスケードの要因のみならず、これとは異なるもう一つの要因からも誘発される。他者の行為を模倣することは模倣することが直接的な便益をもたらすからでもある。例えば、ファックス付き電話機を購入することを考えてみよう。他の誰もファックス受信機を持っていないければ、購入しても価値がない。ファックス付き電話機を買うかどうかを決めるときには、ファックスを送りたいと思う他者がどの程度ファックス機を所有しているかが重要である。他者がファックス機を購入したという情報が追加的な情報として得られるだけではなく、この情報に基づいて、ファックス機を購入するという模倣それ自身が便益をもたらす。

情報カスケードによる意思決定を記述するために、ベイズのルールを導入する。事象  $A$  が起こる確率を  $Pr(A)$ 、事象  $B$  が起こる確率を  $Pr(B)$  と表記する。事象  $B$  が起きたときに、事象  $A$  が起きる条件付き確率を  $Pr(A | B)$  と表現し、事象  $A$  と事象  $B$  が同時に起きる確率を  $Pr(A \cap B)$  とする。確率論の初歩的知識か

ら、条件付き確率  $Pr(A | B)$  は

$$Pr(A | B) = \frac{Pr(A \cap B)}{Pr(B)}$$

で与えられる。同様に、

$$Pr(B | A) = \frac{Pr(A \cap B)}{Pr(A)}$$

が成立つ。これらの関係から

$$Pr(A \cap B) = Pr(A | B)Pr(B) = Pr(B | A)Pr(A)$$

が得られる。よって、

$$Pr(A | B) = \frac{Pr(A)Pr(B | A)}{Pr(B)}$$

となる。これがベイズのルール (Bayes' rule) である。  $Pr(A)$  を事前の確率といい、事象  $B$  が起きたかどうかの情報を知らずに推測された  $A$  が起きる確率を意味する。条件付き確率  $Pr(A | B)$  は、事象  $B$  が起きたことを知った後で計算された  $A$  の確率なので、事後的確率と言う。

ベイズのルールを用いて、情報カスケード問題を分析してみよう。1、2、3、・・・と番号を振られた人々のグループを考える。番号1の人物がある提案を受託するか拒否するか意思決定を行い、次に、番号2の人物が提案を受託するか拒否するか意思決定を行うというように、番号の順番で意思決定をする。例えば、新しい技術を採用するか否か、新しいファッションの洋服を着るかどうか、新しいレストランで食事をするかどうか、選挙で特定の候補者に投票するかどうか、などの意思決定を想定している。提案の起こりうる状態は2種類で、 $G$ (good) という状態と  $B$ (bad) という状態が可能であるとする。これらの生起確率は前もって定まっていて、一様な確率で起こる。提案が  $G$  である事前確率を  $Pr(G) = p$  とする。提案が  $B$  である事前確率は  $Pr(B) = 1 - p$  となる。提案が  $G$  であるとき、提案を受け入れるとペイオフは  $v_g > 0$  となり、提案が  $B$  であるのに提案を受託するとペイオフは  $v_b < 0$  となる。事前確率のもとでは、 $pv_g + (1 - p)v_b = 0$  であるとする。意思決定時に追加される私的情報を導入する。各個人は意思決定までに、提案を受け入れるのがよい考えか、悪い考えかに関する私的信号を受け取る。この私的信号は提案に関して不完全な情報しかもたらさないが、有用な情報を提供する。私的信号のうち、受け入れることがよい考えであると示唆する信号を  $H$  で表現し、受け入れない方がよい考えであると示唆する信号を  $L$  とする。受け入れることがよい考えであるならば、受け取る信号のなかで  $L$  の信号よりも  $H$  の信号数の方が多いはずである。つまり、

$$Pr(H | G) = q > \frac{1}{2}, \quad Pr(L | G) = 1 - q < \frac{1}{2}$$

が成立する。同様にして、

$$Pr(L | B) = q > \frac{1}{2}, \quad Pr(H | B) = 1 - q < \frac{1}{2}$$

が成立すると仮定する。事前情報に追加して、私的信号として  $H$  信号を受け取ったとき、受け入れることの意味決定から得られる期待ペイオフは  $Pr(G | H)v_g + Pr(B | H)v_b$  である。ベイズのルールから、

$$Pr(G | H) = \frac{Pr(G)Pr(H | G)}{Pr(H)} = \frac{Pr(G)Pr(H | G)}{Pr(G)Pr(H | G) + Pr(B)Pr(H | B)} = \frac{pq}{pq + (1 - p)(1 - q)}$$

となる。 $pq + (1-p)(1-q) < pq + (1-p)q = q$ なので、分母が  $q$  よりも小さいので、 $G$  の条件付き確率は  $Pr(G | H) > p$  を満たす。このことは、良い状態 ( $G$ ) が起こるならば、 $L$  信号に比べて、 $H$  信号をより頻繁に受け取ることを意味する。 $Pr(G | H) > p$ ,  $Pr(B | H) < 1 - p$ ,  $v_b < 0$  から

$$Pr(G | H)v_g + Pr(B | H)v_b > pv_g + (1 - p)v_b = 0$$

となる。だから、 $H$  信号を受け取った場合、提案の期待ペイオフは増加するので、提案を受託する方が良い考えとなる。逆に、 $L$  信号を得た場合、提案を拒否した方が得策であることを意味する。

この結論を受け取る信号の回数が複数回になるケースに一般化することは容易である。 $a$  個の  $H$ 、 $b$  個の  $L$  信号から構成される情報を  $S$  で表記する。このとき、

$$Pr(G | S) = \frac{Pr(G)Pr(S | G)}{Pr(S)}$$

が成立する。ここで、 $Pr(S | G) = q^a(1 - q)^b$  である。

$$Pr(S) = Pr(G)Pr(S | G) + Pr(B)Pr(S | B) = pq^a(1 - q)^b + (1 - p)(1 - q)^a q^b$$

なので、

$$Pr(G | S) = \frac{pq^a(1 - q)^b}{pq^a(1 - q)^b + (1 - p)(1 - q)^a q^b}$$

となる。 $a > b$  のとき、 $Pr(G | S) > p$  が成立し、 $a < b$  のとき  $Pr(G | S) < p$  となることは容易に証明できる\*20。

ネットワーク上の各個人が順番に意思決定を行う状況で、他者が行った意思決定を有意味な情報として受け取る場合、情報カスケードが働く。情報カスケードが働くときの、連鎖的意思決定の特徴はどのようになるでしょうか。自分の手番になるとき、それまでの意思決定が各自の私的情報に矛盾しない形で実行されていることを知っており、彼らの意思決定の結果を情報信号として入手しているとする。上記の例で、最初の人物が入手した信号が  $H$  であるならば、彼/彼女は提案を受託するでしょう。反対に、 $L$  信号であるならば、拒否する。2番目の手番の人物は、自身が得た私的信号が、最初の人物が得たであろう信号と同じであると判断するとき、最初の意思決定者と同じの決定をする。もし反対に、最初の人物が得たであろう信号と異なると判断するとき、自身が得た私的信号に基づいて反対の決定を行う。2番目の意思決定者は、いずれにせよ、自身が得た私的信号に基づいて意思決定をする。第3番に手番となる人物の意思決定はどのようになるでしょうか。1番目と2番目の人物が同一の決定をしているケースでは、3番目の人物が得た私的信号が前2者の決定と整合する情報であるならば、当然前2者と同じ決定をする。反対に、3番目の人物が得た私的信号が前2者の決定と矛盾する情報である場合でも、前2者の決定に追従する。前2者が互いに異なる決定を下していたケースでは、3番目の人物が得た私的信号は非常に重要な役割をはたす。この場合、自身が得た私的信号に基づいて決定を下すことになる。一般的に言えば、 $n$ 番目の人物の意思決定は、それまでの人物の意思決定の連鎖において、同一の意思決定が2回連続して続いたとき、自身の私的信号を無視して、彼らの決定に追従することになる。これが情報カスケード現象である。また、それまでに観測された決定のうち、受託決定と拒否決定の回数が同一である、あるいはどちらかが1回多いならば、彼/彼女は自身の個人情報に基づいて決定するので、意思決定上の追従行動は起こらない。

\*20 Easley and Kleinberg(2010)の16章を参照のこと。

いったん情報カスケードが起こると、それ以降、各自が得る私的情報は無視され、意思決定の盲目的な追従行為が開始される。群集化の現象が始まる。これは必ずしも、社会的に望ましいことではない。初期の少量の情報カスケードの引き金を引いているので、それらの情報の内容が間違っている場合、正しくない決定が社会全体の決定となる危険性がある。個々の人物がいかに合理的に行動していても、群集は間違いを起こす。また、情報カスケードの誕生の契機から理解できる通り、群集化過程は崩壊しやすい。情報カスケードの途上で、それまでの決定に矛盾する強力な情報が続けて発信された場合、この新しい私的情報に基づいて意思決定をする人物が登場する。こうした人物が二人登場すると、情報カスケードは終了する。

## 5.2 ネットワーク効果の簡単な例

各ノードの行為の結果得られる自身の経済的便益の大きさがネットワーク上でリンクされている他者の意思決定によって影響を受けることを、ネットワーク効果という。ネットワーク効果は外部効果の一つの種類で、外部効果には負の効果と正の効果がある。ファックス機を所有することから得られる便益はファックス機を所有する人々が多いほど大きくなる。これは正の外部効果である。同じハイウェイを走る車の交通量が多いほど、このハイウェイを利用して目的に到達する時間が長くなる。これは負の外部効果である。混雑現象と言われる。

消費者は区間  $[0, 1]$  に一様に分布しているとする。この区間内に位置する消費者  $x \in [0, 1]$  のある商品に対する留保価値を  $r(x)$  とする。関数  $r(x)$  は連続な単調減少関数とする。正の外部効果を考えているので、新しい商品を購入することから得られる経済的価値の大きさが、その商品の購入者数が多いほど高くなる。商品の購入者の割合が  $z \in [0, 1]$  であるとき、消費者  $x$  の留保価格は  $r(x)f(z)$  で表現できるとする。 $f(z)$  は正のネットワーク効果を表現しているので、増加連続関数であるとする。簡単化のために、 $r(1) = 0$  とおく。また、SNS のようなサービスも考慮するために、 $f(0) = 0$  と仮定する。つまり、誰も商品を購入しなければ、商品の価値そのものが消滅する。商品の留保価格は、商品を購入した人々の割合に依存するので、商品の購入に関する意思決定をするためには、商品購入者の人口割合を推測しなければならない。消費者  $x$  が商品購入者の割合が  $z$  であると推測したとすれば、消費者  $x$  は価格  $p$  が  $p \leq r(x)f(z)$  を満たしていれば商品を購入する。商品の価格が  $p^*$  であるとき、留保価格が  $p^*$  となるような消費者がこの商品を購入する。つまり、 $p^* = r(\hat{x})f(z)$  とおくと、商品を購入する消費者  $x$  の範囲は  $[0, \hat{z}]$  である。 $r(\hat{z}) = \frac{p^*}{f(z)}$  の逆関数表現を使用すると、この式は

$$\hat{x} = g(z) \equiv r^{-1}\left(\frac{p^*}{f(z)}\right)$$

と表現できる。 $r^{-1}$  は関数  $r(x)$  の逆関数である。予測された購入者比率が実際に実現するとき、つまり、予測が自己充足される時 ( $\hat{x} = z$  のとき)、市場は均衡する。横軸に  $z$  を取り、縦軸に  $\hat{x}$  を取った平面上で、 $\hat{x} = z$  のグラフと  $\hat{x} = g(z)$  のグラフの交点が均衡点となる。

例えば、 $r(x) = 1 - x$ 、 $f(z) = z$  とおくと、

$$g(z) = 1 - \frac{p^*}{z}, \quad z \neq 0$$

となるので、 $g(z) = z$  を満たす  $z^*$  の値は複数存在する。

$$z' = \frac{1}{2} - \sqrt{1/4 - p^*}, \quad z'' = \frac{1}{2} + \sqrt{1/4 - p^*}$$

とすると、 $\hat{x} = z$  のグラフと  $\hat{x} = g(z)$  のグラフの交点は Fig.5.1 に示されているように、3点存在する。 $z = z'$

は不安定な均衡点で、 $z = z''$  が安定な均衡点である。誰も商品を購入しないだろうと人々が予測すれば、商品そのものには価値がないので、誰も商品を購入しない。原点は安定な均衡点になる。

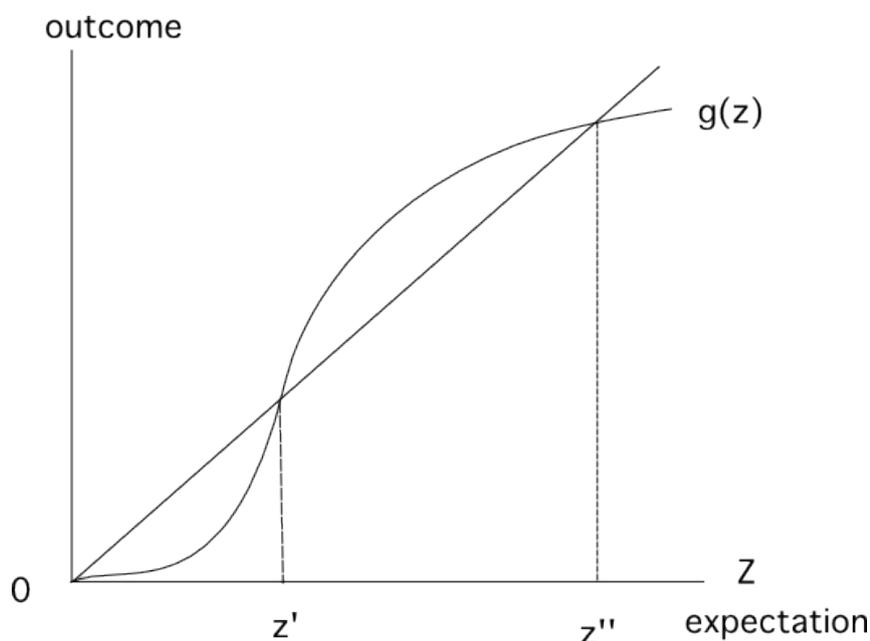


Fig.5.1 Tipping point

同様に、 $f(0) > 0$  のケースを分析できる。 $f(z) = 1 + az^2, a > 0$  とおく。このとき、

$$g(z) = 1 - \frac{p}{1 + az^2}$$

となる。価格  $p$  がある水準  $p^*$  のときには、Fig.5.2 に示されている通り、45度線とこのグラフの交点は3つ存在する。このうち左下と右上の交点が安定な均衡点で、中間の交点是不安定な均衡点である。 $f(0) > 0$  のときは、商品独自の価値が存在しているので、他者がそれを購入しないと予測しても、商品を購入する人物は登場する。原点は均衡点とならない。

価格  $p$  が下落すると、 $g(z)$  のグラフは上方に移動する。価格  $p$  がある水準  $q^*$  以下になると、 $g(z)$  のグラフが上に移動して、45度線との交点が一つになる可能性が生じる<sup>\*21</sup>。初期価格が  $p^*$  であるとき均衡点が  $z^*$  であった場合、市場価格が  $q^*$  に下落すると、市場均衡点が  $z^{**}$  に飛躍する。言い換えれば、価格がすこしだけ下落するとき、市場均衡に劇的な変化をもたらされる。これは、ネットワーク効果が存在するときには、市場条件に小さな変化が生じることが市場規模に非常に大きな不連続的な現象を引き起こす例である。商品の価格が高いときは、市場規模は当該商品に非常に熱心な感情を有するオタク的な購買層の規模にとどまる。商品価格がある閾値を超えて下落すると、市場規模が巨大な大きさに到達する。これは、ネットワーク効果を持つ商品のマーケティング戦略に重要な含意をもたらす。

<sup>\*21</sup> 具体的には  $a = 4, p^* = 0.93$  および  $q^* = 0.9$  とおくと、上記の現象が確認できる。詳細な分析は、Easley and Kleinberg(2010)を参照のこと。

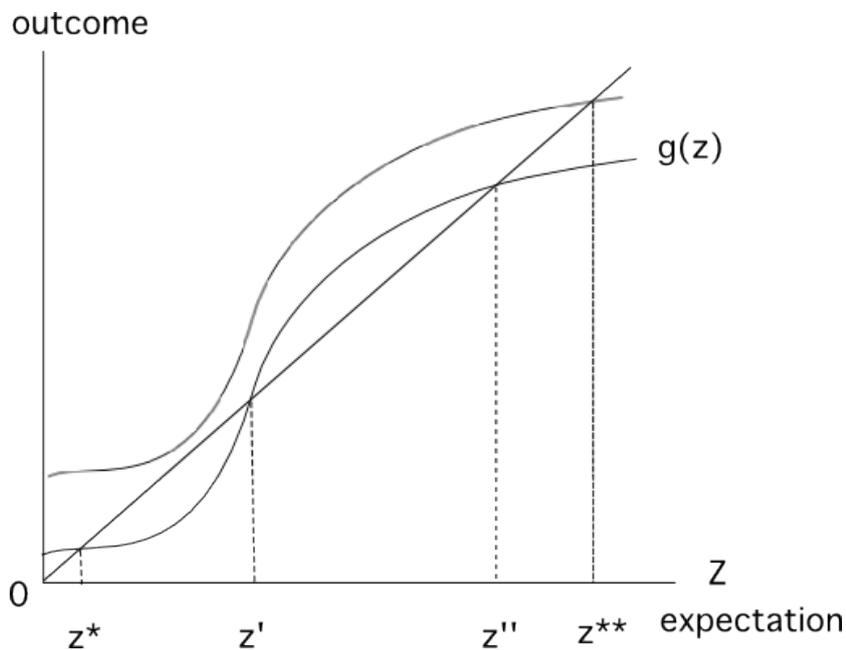


Fig.5.2 Multiple equilibrium

## 6 イノベーションと感染症の拡散モデル

### 6.1 新製品の浸透モデル

Bass(1969)が提案した新製品の浸透モデルは、ネットワーク上での相互作用を明示的に導入したものではないが、背景として有用なのでここで取り上げる。時刻  $t$  で、新製品を採用した主体の社会全体に対する割合を  $F(t)$  とする。各主体が技術革新を実現する確率を  $p$ 、他社の技術革新を模倣できる確率を  $q$  とする。このとき、新製品を採用した主体の人口に占める比率の変動を表現する動的な方程式は

$$F(t) - F(t-1) = p(1 - F(t-1)) + q(1 - F(t-1))F(t-1)$$

となる。 $p(1 - F(t))$  は技術革新の実現確率と未だ技術革新を実現していない主体の比率の積を意味する。 $q(1 - F(t-1))F(t-1)$  は模倣を通して新技術を採用した主体の比率を表現する。この差分方程式を連続時間表現に変更すると、

$$\frac{dF(t)}{dt} = (p + qF(t))(1 - F(t))$$

が得られる。初期条件  $F(0) = 0$  でこの微分方程式を解くと、

$$F(t) = \frac{1 - e^{-(p+q)t}}{1 + \frac{p}{q}e^{-(p+q)t}}$$

である。これは、パラメータ  $p$  と  $q$  の値を調整することによって、様々な拡散過程を記述することができる。典型的な S 字型曲線である。

## 6.2 病原菌の感染モデル

汚染や情報の拡散をモデル化する理論は、物理学や数学では浸透理論 (*percolation theory*) と呼ばれている。ネットワーク上における情報の伝搬やナビゲーションを分析するために浸透理論を活用する。

最初に、最も典型的なランダム・ネットワークの一つである *Erdős and Rényi* 型ネットワークを考える。 $N = \{1, 2, \dots, n\}$  から、任意に選び出した二つのノード間にリンクが張られる確率 (リンク形成確率) が、各ノードの位置に依存せず、同一の  $p$  であるとする。ただし、 $0 < p < 1$  である。このネットワークに  $m$  個のリンクが張られる確率は

$$p^m(1-p)^{n(n-1)/2-m}$$

で与えられる。また、あるノードに  $d$  個のリンクが接続している確率は

$$p^d(1-p)^{n-1-d}$$

なので、任意に選ばれたノードが次数  $d$  となる確率は

$$Pr(d) = \binom{n-1}{d} p^d(1-p)^{n-1-d}$$

である。平均次数は  $\hat{\eta} = \sum_{d=0}^{n-1} Pr(d)d = (n-1)p$  である。形成されるネットワーク上のリンク総数は確率変数であるが、大数の法則により、 $n$  が非常に大きくなる時、その平均値は  $\frac{n(n-1)}{2}p$  となる。各ノードの集中化係数が  $p$  になることは自明である。さらに、 $n$  が非常に大きくなる時には、平均次数をパラメータ  $\eta = (n-1)p$  としてもポアソン分布になる。

$$Pr(d) = \frac{e^{-\eta}\eta^d}{d!}.$$

この次数分布で表現されるネットワークをポアソン型ランダム・ネットワークという。すべてのノードが連結されている条件は、平均次数が1以上になること、

$$(n-1)p > 1$$

である。

ランダム・ネットワーク上の一つのノードが病気に感染しているとする。各ノードは病気に対する抗体ワクチンを確率  $\pi$  で接種されている。この伝染病は、ネットワーク上で、どのくらいの人口比率に感染するでしょうか。最初に、この問題をポアソン・ランダム・ネットワーク上で考えてみよう。各ノードにリンクが連結される確率は  $p$  であるが、各ノードが確率  $\pi$  で感染病に対する免疫を持っているので、ネットワークから取り除かれる。従って、病気が感染していくネットワークは、ノード数が総数  $(1-\pi)n$  で、確率  $p$  で各ノードにリンクが連結される。巨大コンポーネントが出現するための閾値条件は、 $(1-\pi)np = 1$  である。もし  $(1-\pi)np < 1$  ならば、無視できる数のノード数にのみ伝染した後、伝染病はネットワーク全体に広まらず、感染は終了する。反対に、 $(1-\pi)np > 1$  が成立するならば、伝染病はネットワーク上を拡散していき、(免疫がなく感染可能な) ノード総数の一定程度の割合が感染する。初期に感染したノードがネットワーク上の巨大なコンポーネントに属すると、病気はこの巨大コンポーネント全体に感染する。

ランダム・ネットワーク以外の一般的なネットワークにおける病気の感染過程を同じように分析できる。

ここで、伝染病拡散のネットワーク・モデルとして有用な *SIR* モデルと *SIS* モデルを取り上げる。*SIR* モデルでは、ネットワーク内の各ノードの状態が以下の 3 種類の状況にあると想定される。感染可能な状態 (*susceptible*)、感染した状態 (*infected*)、免疫ができて感染しない状態 (*removed*) のいずれかであると仮定される。人々 (ノード) は互いにネットワーク上の個人と接触し、感染した個人から感染可能な個人へと伝染病が感染する。感染した人物が感染可能なネットワーク上の隣人に伝染病を感染させるために必要な時間  $x$  はパラメータ  $\beta$  の指数分布  $1 - e^{-\beta x}$  に従うとする。また、感染したノードが、免疫ができて伝染病のネットワークから取り除かれるために必要な時間は同じようにパラメータ  $\gamma$  の指数分布に従うとする。この仮定の下では、感染した人物が隣人に病気を感染させる確率  $t$  は

$$t = 1 - e^{-\beta/\gamma}$$

で与えられる。ネットワークの構造は前節で展開した配列モデルによって記述されるとする。次数分布を  $Pr(d)$  と表記する。

伝染病の伝搬は、ネットワーク上のノードを一つランダムに選び、そのノードが伝染病に感染したところから始まる。伝染病の感染ルートを分析するために、感染したノードから出るリンク先のノードを確率  $(1-t)$  で取り除き、免疫力のあるノードを取り除いたネットワークに残るコンポーネントのサイズを計算する。既に前節で議論した伝染モデルでの導出と同じように、免疫力のあるノードを取り除いたネットワークにおいては、次数分布の確率  $P_t(d)$  は

$$P_t(d) = \sum_{d' \geq d} Pr(d') \binom{d'}{d} t^d (1-t)^{d'-d}$$

で与えられる。この次数分布を用いて、伝染病が無視できない大きさの規模でネットワーク内を伝染する閾値の大きさや病気に感染するコンポーネントのサイズを計算することができる。

*SIS* モデルでは、感染可能なノードは病気に感染し、その病気からは回復するが、再び感染する可能性がある。例えば、風邪やインフルエンザに感染したとき、病気から回復後はそのインフルエンザに対するウイルス抗体が形成されるが、風邪や別種のインフルエンザには感染する状態が続く。ネットワーク上の各ノードは次数分布確率に従ってランダムに社会的な接触をしているとする。一定期間内に、次数  $d_i$  をもつノード  $i$  は  $d_i$  回の社会的な接触をしているとみなす。次数分布が  $Pr(d)$  であるとき、任意のノードが次数  $d$  を持つノードと社会的な接触をする確率は

$$\frac{Pr(d)d}{\eta}$$

となる。隣人の数が多い人物ほどより多い回数の社会的接触をするので、各個人は社会的な接触回数が多い人物と接触する可能性がより高くなる。よって、次数が大きい人物ほど病気を感染させる確率は高くなる。

**講義ノートはここで終わりです。ここからは経済的ネットワーク理論の上級バージョンに進んで下さい。**