投資のリアル・オプションズ・モデル：技法と事例

増山　幸一
明治学院大学経済学部

平成 21 年 9 月 3 日

1　始めに

ファイナンスの理論で発達してきたオプション価格付けの理論を実物投資問題に応用するアプローチをリアル・オプションズ・アプローチと呼んでいる．オプション価格付け理論の基本的モデルは Black-Scholes の公式に集約される Black-Scholes-Merton 理論に他ならない．Brennan and Schwartz(1985) および McDonald and Siegel(1985, 86) による研究が、Black-Scholes-Merton 理論を実物投資行動の分析に適用したリアル・オプションズ・アプローチによる最初の代表的な研究である．Brennan and Schwartz(1985) は鉱物資源開発投資プロジェクトの評価をオプション価格理論に基づいて説明した研究であり、McDonald and Siegel(1985, 86) の研究は操業停止オプションと投資プロジェクトのタイミング・オプションの評価問題を分析したものである．それ以降、投資のリアル・オプションズ・モデルの研究が急進展してきた．Dixit and Pindyck(1994) は、90 年代初頭までに行なわれたリアル・オプションズ・アプローチに基づく研究を整理している。その後の研究の進展は Trigeorgis(1996)、Brennan and Trigeorgis(2000)、Smit and Trigeorgis(2004) などにおいてサーベイされている．

言うまでもなく、リアル・オプションズ・モデルの分析手法は近年のファイナンス理論で発展してきた数学的手法に多くを依存しており、そうした最新の数学的分析手法は現代確率過程論の急速な発展を背景として展開されている[1]．本稿では、ルベーグ測度論の知識を前提とせず、さらに、ファイナンス理論におけるオプション価格付けの理論も前提とせず、リアル・オプションズ・アプローチの定式化において必須の諸概念や手法の数学的な理論をコンパクトかつ簡易に解説し、それらの手法が各種のリアル・オプションの事例においてどのように適用できるのかを説明する．総じて、リアル・オプションズ・モデルのより一般的な定式化の方法を提案し、幾つかの重要な事例を再検討することを通して将来に残された課題および今後必要となる新しいアプローチの必要性を提案する．

最初に、第 2 節で、ファイナンス理論で必須とされている確率過程論の数学的な基礎概念を説明する．特にブラウン運動によって駆動される拡散過程を表現する確率微分方程式の概念、それを解くために必要な伊藤積分と伊藤微分 (伊藤の公式) を説明し、確率過程の生成作用素およびラドン＝ニコディムの定理を用いたマーチンゲール測度などの概念を説明する．ファイナンス理論での最先端的な理論研究を続けるためには、確率過程論の全体像を理解することが必要で、例えば、Karatzas and Shreve(1991)、Revuz and Yor(1991) やØksendal(2005) などの専門書を理解しておくことが必要であるが、本稿では、ルベーグ測度論の知識を

[1] 1980 年代までは、確率過程論の大学院学生向けの代表的なテキストは Doob(1953)、Karlin and Taylor(1975, 81) および Liptser and Shiryayav(1977) などであった．1980 年代以降、ファイナンス理論の進展と平行して、ブラウン運動と確率微分方程式を主として取り扱う確率過程論の専門書が多く登場することになる．その代表的なテキストは Chung and Williams(1983)、Karatzas and Shreve(1988)、Øksendal(1985)、Protter(1990) などであり、これらのテキストは改訂を何度も行いつつ重版を重ねている．また、Duffie(1992)、Musiela and Rutkowski(1997) および Karatzas and Shreve(1998) など、幾何ブラウン運動と確率微分方程式を基礎とした連続時間数理ファイナンスの代表的なテキストが登場して、ファイナンス理論を専攻する学生の必読書となってきた．

前提とすることなく、リアル・オプションズ・アプローチを適用するために必要とされる数学的定式化と解析の手法を必要最小限のレベルで自己完結的に説明する[2].

リアル・オプションズの対象となるほとんどすべての投資問題は確率的最適制御問題として定式化される．確率的最適制御問題を解く一般的な手法は動的計画法を応用することである．動的計画法の応用では、価値関数が満たすべき偏微分方程式（通常、ハミルトン＝ヤコビの方程式あるいは、ベルマン方程式と呼ばれている基本方程式）を導出する手続きが必須となる．第 3 節で、確率的最適制御問題の解法に必要な基本方程式であるハミルトン＝ヤコビ＝ベルマンの偏微分方程式を導出する手続きとその帰結を説明する．

次に、第 4 節で、Black-Scholes-Merton モデルと呼ばれる枠組み内で、先物やオプションなどのデリバティブの価格がどのように評価されるべきかについて説明する．このときの基本的な前提条件は、自由な取引がなされる金融資産市場では裁定機会が存在しないという無裁定条件である．安全資産と等価な (オプションと危険資産から構成される) ポートフォリオの複製手法を展開した後、リアル・オプションズ・モデルで使用される問題に対して応用できるような形に、Black-Scholes-Merton モデルを拡張する．

第 5 節以降で、リアル・オプションの代表的な幾つかの事例を取り上げ、これらの問題をコンパクトに定式化して、それらのリアル・オプション問題の解析手法を説明する．これらの事例は互いに独立したものなので、それぞれ自己完結的に独立に理解することができる．それゆえ、表記法も各事例ごとに独立しているので、各事例ごとの表現方法に注意してください．

第 5 節では、工場操業の稼動・停止に関わる意思決定問題をリアル・オプションズ・アプローチの枠内で定式化する方法を簡単に説明し、企業の市場への参入と市場からの退出に関わる意思決定問題を Ss タイプのトリガー戦略としてモデル化するとき、トリガー発動に対応する閾値を決定する方法を説明する．トリガーを発動させる閾値の大きさが、将来収益リスクの存在に伴って、通常のマーシャル的な現在価値計算から得られる水準から乖離することを説明する．第 6 節では、工場建設の投資プロジェクトの実施問題を取り上げる．投資プロジェクトから得られるキャッシュフローの期待現在価値がある閾値を越えた時点で投資プロジェクトを実施することが最適政策になることを示し、この閾値がリスクのボラティリティーに大きく依存することを説明する．第 7 節では、資本ストックの変更には調整費用が必要とされるとき、投資が一度実行されるとこの実施を元に戻すことができないという投資の不可逆性を明示的に定式化したモデルを取り上げる．投資プロジェクトが生み出す将来キャッシュフローのリスクのボラティリティーが投資に大きな影響をもたらすが、リスクのボラティリティーと投資の大小の間には単調な負の関係が必ずしも成立するとはいえないことを説明する．第 8 節では、投資プロジェクトが長期にわたって続けられるとき、投資期間中に投資費用が変化することが起こるような投資決定問題を取り上げる．投資期間中に発生する投資費用の不確実性を明示的にモデル化する方法を議論する．第 9 節では、投資に関わる不確実性が大きいと指摘されている R&D 投資プロジェクトを取り上げる．R&D 投資プロジェクトの不確実性をどのような確率過程によってモデル化すべきかについて議論する．簡単なモデルを用いて、企業が R&D プロジェクトの将来収益に関わる不確実性を考慮するならば、マーシャル的な損益計算に依拠する場合に比べて、R&D プロジェクトの実施時期が先送りされることを説明する．

第 10 節以降では、投資プロジェクトが多段階に渡るような複雑な投資の意思決定問題を取り上げる．第 10 節では、多段階投資プロジェクトの中でも最も簡単な 2 段階投資プロジェクトを考察する．第 11 節でさらに複雑な多重リアル・オプションズの事例を取り上げて簡潔に議論する．投資プロジェクトの意思決定が多段階に渡って行われるような場合、投資プロジェクトの初期時点での割引現在価値は将来において直面する複数のオプション価値を内包することになるので、解析的な関数形を導出することが極めて困難となる．

[2] Karatzas and Shreve(1991) などの確率過程論のテキストを十全に理解することは、ルベーグ測度論に熟知した研究者でない限り、非常に難しいと思われる．なお、数学的な背景としてルベーグ測度論などの基礎知識を前提としていない代表的なテキストとして、Neftci(2000) および Shreve(2004) などがあるので、それらを参考にすると良い．

それ故、分析は数値計算に大きく依存することとなる.

2　伊藤のレンマ、生成作用素およびマーチンゲール測度

ξ を、時刻の集合 $\mathcal{T}$ に属する時刻 t に対して確率ベクトル $\xi(t,\cdot) \in \mathcal{S}$ を対応させる確率過程とする．時刻の集合 $\mathcal{T}$ は通常 1 次元実数空間 R^1 の部分集合で、ここでは、実数のコンパクトな区間とし、$[t_0, t_1]$ あるいは $[0, T]$ と表現する．確率ベクトルの値域 $\mathcal{S}$ を分離可能な完備距離空間、$\mathcal{S} = R^n$ とする．確率過程 $\xi = \xi(\cdot,\cdot)$ は直積集合 $\mathcal{T} \times \Omega$ から集合 $\mathcal{S}$ への写像である.

確率過程 ξ が確率積分を含む積分方程式

$$\xi(t) - \xi(t_0) = \int_{t_0}^{t} \beta(r)dr + \int_{t_0}^{t} \gamma(r)dw(r),\ t \in \mathcal{T}$$

で表現されているとする．ただし、$\beta(t),\ \gamma(t)$ は

$$E\int_{t_0}^{t_1} |\beta(r)|dr < \infty,\ E\int_{t_0}^{t_1} |\gamma(r)|^2 dw(r) < \infty$$

を満たし、フィルトレーション $\mathcal{F}(t)$(時刻 t までに観測された確率過程 ξ のサンプル経路から生成される σ 代数) において可測な確率過程とする．この式は確率積分方程式と呼ばれている．この積分方程式の微分形式は、形式的に

$$d\xi = \beta(t)dt + \gamma(t)dw,\ t \in \mathcal{T} \tag{1}$$

で与えられる.

確率変数 ξ が n 次元ベクトルであるならば、確率微分方程式 (1) の要素ごとの一次元表現は

$$d\xi_i = \beta_i(t)dt + \sum_{j=1}^{d} \gamma_{ij}(t)dw_j,\ i = 1, 2, \ldots, n,\ t \in \mathcal{T} \tag{2}$$

となる．ここで、ブラウン運動は d 次元確率過程となっている．つまり、

$$\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)^t,\ w = (w_1, \ldots, w_d)^t$$

である．ここで、上付き添え字 t は転置を表す。β がベクトルで $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_n)^t$ と表現され、γ が行列で、その i 行 j 列を γ_{ij} とすれば、式 (1) は確率変数 ξ がベクトルであるケースを含めた確率微分方程式の表現となる.

定理 2.1 **(伊藤の公式)**
もし ψ が関数族 $C^{1,2}$ に属し、$\eta(t) = \psi[t, \xi(t)]$ であるとする[3]．ただし、ξ は確率微分方程式 (1) を満たす１次元確率過程であるとする．このとき、関係式

$$\begin{aligned} d\eta &= \psi_t(t,\xi(t))dt + \psi_x(t,\xi(t))d\xi + \frac{1}{2}\psi_{xx}(t,\xi(t))d\xi d\xi, \\ &= \psi_t(t,\xi(t))dt + \psi_x(t,\xi(t))\beta(t)dt + \frac{1}{2}\psi_{xx}(t,\xi(t))\gamma^2(t)dt + \psi_x(t,\xi(t))\gamma(t)dw \end{aligned}$$

が成立する．ψ_t は関数 ψ の時間による偏微分、ψ_x は第２番目の変数 ξ による関数 ψ の偏微分、ψ_{xx} は ξ による２階偏微分を表現する．これを伊藤の確率微分公式という.

[3]関数 $\psi(t,x)$ は直積集合 $\mathcal{T} \times \mathcal{S}$ 上で定義される．この関数の偏微分 $\psi_{\mathrm{t}}, \psi_{\mathrm{x}}, \psi_{\mathrm{xx}}$ が $\mathcal{T} \times \mathcal{S}$ 上で連続ならば、関数 ψ は関数族 $C^{1,2}$ に属するという.

伊藤の公式 (Ito's lemma) が成立する端的な理由はブラウン運動の 2 次変分が時間の線形関数になっていることによる．関数 η をテイラー級数展開するときに、2 次項に関して、$dt^2 \approx 0$, $dwdt \approx 0$ が成立する一方で、$d\xi d\xi$ がゼロと近似できない．$d\xi(t)d\xi(t) = \gamma^2(t)dw(t)dw(t) = \gamma^2(t)dt$ なので、2 次項すべてをゼロと近似できず、dw の 2 次項 $dw(t)dw(t) = dt$ を含む近似式で考えなければいけないことによる．

ここで、状態変数 ξ が確率微分方程式 (2) に従う n 次元ベクトルであるケースを考える．

$$\psi_x = (\psi_{x_1}, \dots, \psi_{x_n}),\ a_{ij} = \sum_{l=1}^{d} \gamma_{il}\gamma_{jl}$$

とおくと、伊藤の公式は

$$\begin{aligned} d\eta &= \psi_t(t,\xi(t))dt + \psi_x(t,\xi(t))d\xi + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} \psi_{x_i x_j}(t,\xi(t))d\xi_i d\xi_j, \\ &= \psi_t(t,\xi(t))dt + \sum_{i=1}^{n} \psi_{x_i}(t,\xi(t))\beta_i(t)dt + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\psi_{x_i x_j}(t,\xi(t))dt \\ &\quad + \sum_{i=1}^{n} \psi_{x_i}(t,\xi(t)) \sum_{l=1}^{d} \gamma_{il}(t)dw_l \end{aligned}$$

とベクトル値確率過程に対して拡張される．

確率微分方程式において、係数 β, γ が状態変数 ξ の関数となっていることを明示的に表示すれば、

$$d\xi = b(t,\xi(t))dt + \sigma(t,\xi(t))dw \tag{3}$$

と表現できる．ただし、以下ではすべて、w は標準ブラウン運動を表現する．1 次元変数表現にすると、

$$d\xi_i = b_i(t,\xi(t))dt + \sum_{j=1}^{d} \sigma_{ij}(t,\xi(t))dw_j, i = 1, 2, \dots, n$$

である． 確率微分方程式 (3) の解は以下の確率積分方程式

$$\xi(t) = \xi(t_0) + \int_{t_0}^{t} b(r,\xi(r))dr + \int_{t_0}^{t} \sigma(r,\xi(r))dw(r)$$

の解と理解される．ただし、$\xi(t_0)$ は初期値である．確率微分方程式 (3) の解 (強い解) が存在するためには二つの条件 (伊藤の条件とも言う) が成立することが必要である．一つの条件は Lipschitz の条件と言われ、もう一つの条件は成長の条件と言われている．以下では、これらの条件が成立して、確率積分方程式の解がユニークに定まることを前提とする．[4]

確率過程 ξ がマルコフ過程であるためには、任意の時刻 r における状態 $\xi(r)$ が、時刻 r 以降の時刻における確率過程の状態に関するすべての確率的情報を含んでいる必要がある．すなわち、任意の $s_1 < s_2 < \cdots < s_m < t \in \mathcal{T}$ とすべての $B \in \mathcal{B}(\mathcal{S})$ に対して、

$$\Pr(\xi(t) \in B \mid \xi(s_1), \dots, \xi(s_m)) = \Pr(\xi(t) \in B \mid \xi(s_m)) \tag{4}$$

が成立するとき、確率過程 ξ はマルコフ過程であるといわれる．

$$P(s,y;t,B) = \Pr(\xi(t) \in B \mid \xi(s) = y)$$

[4] 確率微分方程式の解が存在するための条件については、Karatzas and Shreve(1991) の第 5 章を参照してください．

を推移関数 (推移確率) という．s,t,B を与えるとき、$P(s,\cdot;t,B)$ は $\mathcal{S}$ で可測関数であり、s,y,t を与えるとき、$P(s,y;t,\cdot)$ は $\mathcal{S}$ の確率測度となる．よく知られているように、チャップマン＝コルモゴロフの方程式

$$P(s,y;t,B)=\int_{\mathcal{S}}P(r,x;t,B)P(s,y;r,dx)$$

が成立する．推移関数が時間の差 $t-s$ のみに依存するとき、すなわち

$$P(s,y;t,B)=P(0,y;t-s,B)$$

が成立するとき、マルコフ過程は定常過程あるいは自律的であると言われる．

連続時間パラメターのマルコフ過程の中で、サンプル経路が時間に関して確率 1 で連続関数となるような確率過程を拡散過程 (duffusion process) という．拡散過程の厳密な定義は次のようになる．

定義 2.1 (拡散過程)
以下の条件 *(1)* を満たす連続時間マルコフ過程のうち、条件 *(2)* を満たす関数 $a_{ij}(t,x), b_i(t,x), i,j=1,\dots,n$ が連続関数となる確率過程を拡散過程という[5]．

(1) 任意の $\epsilon>0$ と $t\in\mathcal{T}$ および $x\in R^n$ に対して

$$\lim_{h\to 0^+}h^{-1}\int_{|x-z|>\epsilon}P(t,x;t+h,dz)=0,$$

が成立する；

(2) 任意の $\epsilon>0$ と $t\in\mathcal{T}$ および $x\in R^n$ に対して

$$\lim_{h\to 0^+}\int_{|x-z|\leq\epsilon}(z_i-x_i)P(t,x;t+h,dz)=b_i(t,x),$$
$$\lim_{h\to 0^+}\int_{|x-z|\leq\epsilon}(z_i-x_i)(z_j-x_j)P(t,x;t+h,dz)=a_{ij}(t,x)$$

を満たす関数 $a_{ij}(t,x), b_i(t,x), i,j=1,\dots,n$ が存在する．

ベクトル値関数 $b=(b_1,\dots,b_n)$ はドリフト係数 (drift parameters, infinitesimal mean)、行列値関数 $a=(a_{ij})$ は拡散係数 (diffusion parameters, infinitesimal variance) といわれる．条件 (1) は、非常に短い時間内では、確率過程の変位の大きさが ϵ を超えるような確率がゼロとなることを意味する．言い換えると、サンプル経路がほとんどあらゆる時刻で連続となることを含意する．定義の第 1 の条件式 (1) の代わりに、より強い条件

$$\lim_{h\to 0^+}\int_{\|x-z\|>\epsilon}\|z-x\|^2P(t,x;t+h,dz)=0,$$

が用いられることが多い．このとき、$b(t,\xi(t))h$ と $a(t,\xi(t))h$ は, それぞれ、$\xi(t)$ を与えたときの, 増分 $\xi(t+h)-\xi(t)$ の条件付期待値 $E[\xi(t+h)-\xi(t)|\xi(t)]$ と共分散行列 $\mathrm{Cov}[\xi(t+h)-\xi(t)|\xi(t)]$ を非常によく近似する．共分散行列 a が

$$a_{ij}=\sum_{l=1}^{d}\sigma_{il}\sigma_{lj},\ i,j=1,\dots,n$$

[5] ここで用いた定義は、Karlin and Taylor(1981) による．

なる関係式で表現できるとき、確率微分方程式 (3) の解は拡散過程となることは容易に理解できる.

マルコフ過程における推移作用素を定義する. 状態空間 $\mathcal{S}$ 上で有界で、ボレル可測な実数値関数の集合を $V(\mathcal{S})$ と表記する. ただし、ノルムは

$$\|\Psi\| = \sup_{x\in\mathcal{S}}|\Psi(x)|$$

で定義される. $\mathcal{S}$ 上の関数 $\Psi(x)$ に対して、推移作用素 $S_{s,t}$ を以下のように定義できる.

$$S_{s,t}\Psi(y) = \int_{\mathcal{S}} \Psi(x)P(s,y;t,dx) = E_{sy}\Psi[\xi(t)].$$

ここで、表記法 E_{sy} は初期データが $\xi(s) = y$ であることを明示する. チャップマン＝コルモゴロフの方程式から、

$$S_{s,t} = S_{r,t}(S_{s,r}),\ s < r < t$$

が成立することは容易に理解できる. さらに、$V(\mathcal{S})$ の部分集合に対して、以下のように生成作用素 $\mathcal{A}(t)$ を定義する[6]. $\mathcal{S}$ 上で連続かつ有界な任意の関数 $\Psi(t,x)$, $x \in \mathcal{S}$ に対して

$$\mathcal{A}(t)\Psi = \lim_{h\to 0^+} \frac{S_{t,t+h}\Psi - S_{t,t}\Psi}{h}$$

と定義する. ここで、$S_{t,t} = 1$ である. 生成作用素は関数 Ψ を関数 $\mathcal{A}(t)\Psi$ に変換する操作を定めるものである. チャップマン＝コルモゴロフの方程式を用いれば、

$$\frac{S_{s,t+h}\Psi - S_{s,t}\Psi}{h} = \frac{S_{t,t+h}(S_{s,t}\Psi) - S_{s,t}\Psi}{h}$$

であるから、$u(t,x) = S_{s,t}\Psi(x)$ とおいて、h を無限小にする極限をとれば、

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} = \mathcal{A}(t)u(t,x)$$

という微分方程式が得られる. これをコルモゴロフの後ろ向きの方程式という.

確率過程が拡散過程であるケースに対して、生成作用素 $\mathcal{A}(t)$ は以下のような微分作用素となることが知られている[7].

定理 2.2 **(拡散過程の生成作用素)**

ベクトル値関数 $b = (b_i)$ と行列値関数 $a = (a_{ij})$ は連続関数で、伊藤の条件を満たしているとする. このとき、確率過程 ξ がドリフト係数 b と共分散行列 a をもつ拡散過程ならば、生成作用素 $\mathcal{A}$ は以下のように2階の偏微分作用素

$$\mathcal{A}(t)\Psi = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(t,\xi)\frac{\partial^2\Psi}{\partial x_i\partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i(t,\xi)\frac{\partial\Psi}{\partial x_i}$$

で表現できる. ただし、関数 Ψ は ξ の C^2 関数である.

---

[6] 生成作用素 (infinitesimal generator) の定義とその性質についての詳細は、Øksendal(2005) の第 7 章を参照してください. Øksendal(2005) では、生成作用素は $\mathcal{A}(t)\Psi = \lim_{\mathtt{h}\to \mathtt{0}^+}[(E_{\mathtt{tx}}\Psi(t+h) - x)/h]$ と定義されている

[7] 伊藤拡散過程における生成作用素の具体的計算過程の詳細については、Øksendal(2005) の第7章あるいは Karlin and Taylor(1981) の第 15 章を参照してください.

飛躍型マルコフ過程における生成作用素は以下のように与えられることが知られている．状態 ξ が x から出発したとき、x 以外の状態に達する時間の最小値を

$$\tau_x(\omega) = \inf\{t > 0;\ \xi(t) \neq x\}$$

と定義する．x から出発したサンプル経路が時刻 t までに飛躍しない確率 $P_x(\tau_x \geq t)$ は

$$P_x(\tau_x \geq t) = e^{-\lambda(x)t}$$

となる．つまり、τ_x はパラメター $\lambda(x)$ の指数分布に従い、$E_x(\tau_x) = 1/\lambda(x)$ が成立する．時刻 τ_x で飛躍したとき、サンプル経路が E にいる確率分布 $P_x(\xi(\tau_x) \in E)$ を

$$\pi(x, E) = P_x(\xi(\tau_x) \in E)$$

と表記する．このとき、生成作用素 $\mathcal{A}(t)\Psi$ は

$$\mathcal{A}(t)\Psi = \lambda(\pi\Psi - \Psi)$$

で与えられる．ただし、

$$\pi\Psi(x) = \int_{\mathcal{S}} \Psi(y)\pi(x, dy)$$

である．例としてポアッソン過程を考えると、$\lambda(x) = \lambda$、$\pi(x, E) = \delta_{x+1}(E)$ であるから、

$$\mathcal{A}(t)\Psi(x) = \lambda(\Psi(x+1) - \Psi(x))$$

となる．

ちなみに、確率過程 $x(t)$ が

$$x(t) = \xi(t) + J(t),$$

と定義されているケースを考える。ここで、$J(t)$ は λ をパラメターとするポアッソン過程である。このとき、この確率過程の伊藤微分は

$$\begin{aligned} d\psi(t, x(t)) = \psi_t(t, x(t))dt + \psi_x(t, x(t))d\xi \quad &+ \quad \frac{1}{2}a\psi_{xx}(t, x(t))dt \\ &+ \quad \lambda\{\psi(t, \xi(t) + J(t)) - \psi(t_-, \xi(t_-) + J(t_-))\}dt, \end{aligned}$$

となる。J はポアッソン過程であるので、時刻 t で飛躍が起きているとき、$J(t) = J(t_-) + 1$ である。

次に、Dynkin の公式を導出する．確率過程 ξ が確率微分方程式 (3) に従うとする．関数 $\eta(t) = \psi(t, \xi(t))$ に伊藤の公式を適用すると、

$$d\eta = \psi_t(t, \xi(t))dt + \psi_x(t, \xi(t))b(t, \xi)dt + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\psi_{x_i, x_j}(t, \xi(t))dt + \psi_x(t, \xi(t))\sigma(t, \xi(t))dw,$$

が得られる．この両辺を積分すると、

$$\psi(t, \xi(t)) - \psi(s, \xi(s)) = \int_s^t [\psi_t + \mathcal{A}(r)\psi(r)]dr + \int_s^t \psi_x \sigma dw$$

となる．この両辺の期待値をとれば、以下の定理が成立する．

定理 2.3

b, a は確率微分方程式の解が存在するための条件 (リプシッツの条件) を満たし、ψ は関数族 $C^{1,2}$ に属する連続な関数であるとする．さらに、任意の (s, y) に対して、

$$E_{sy}\int_s^{t_1}|\psi_t+\mathcal{A}(t)\psi(t)|dt<\infty$$

を満たすとする．このとき、

$$\psi(s,y)=-E_{sy}\int_s^t[\psi_t+\mathcal{A}(t)\psi(t)]dt+E_{sy}\psi(t,\xi(t)) \tag{5}$$

が成り立つ．

この定理は伊藤の公式を生成作用素を用いて表現したものと理解され、Dynkin の公式あるいはファインマン-カッツ公式の特殊ケースに該当する[8]．この定理は、最適制御問題の基本方程式 (ハミルトン・ヤコビ・ベルマンの方程式) を導出する際に必要となる。なお、確率過程 ξ が拡散過程でなくても、マルコフ過程であればこの定理が成立することも知られている．

ここで、ファイナンスの理論で用いられるリスク中立測度の概念を導入するために、マーチンゲール測度を説明する．確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ とその上に定義される確率変数 X と Z を考える．ただし、$P(Z>0)=1,\ EZ=1$ とする．このとき、新しい確率測度 $\tilde{P}$ を

$$\tilde{P}(A)=\int_A Z(\omega)dP(\omega), A\in\mathcal{F}$$

と定義する．言い換えると、$\tilde{P}(A)=E[Z1_A]$ である．1_A は集合 A 上で 1 をとり、それ以外では 0 となる特性関数である．このように定義された $\tilde{P}$ は確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上の確率測度で、P と等価である．$\tilde{P}$ と P が互いに等価であるとは、それぞれの測度にゼロを与える集合が一致することを言う．ラドン＝ニコディムの定理から、そうした等価な測度が上記の定義によって与えられることが知られている[9]．確率変数 X の確率測度 P による期待値 EX と確率測度 $\tilde{P}$ による期待値 $\tilde{E}X$ を考えることができる．これらの間には

$$\tilde{E}X=E[XZ]$$

という関係があることも証明できる．Z をラドン＝ニコディム微分 (Radon-Nikodym derivative) といい、

$$Z=\frac{d\tilde{P}}{dP}$$

と書く．ブラウン運動の時刻 t までのフィルトレーションを $\mathcal{F}(t)$ とするとき、ラドン＝ニコディム微分過程を

$$Z(t)=E[Z|\mathcal{F}(t)],\ 0\leq t\leq T$$

と定義する． $0\leq s\leq t\leq T$ に対して、条件付期待値の性質から

$$E[Z(t)|\mathcal{F}(s)]=E[E[Z|\mathcal{F}(t)]|\mathcal{F}(s)]=E[Z|\mathcal{F}(s)]=Z(s)$$

なので、ラドン＝ニコディム微分過程はマーチンゲールである．Girsanov の定理が非常に重要となるので、証明なしで以下に掲載する[10]．

[8]Dynkin の公式およびファインマン-カッツ公式については、Karatzas and Shreve(1991) やØksendal(2005) などを参照してください。

[9]Radon-Nikodym の定理の証明については、Royden(1968) などのルベーグ測度論のテキストを参照してください.

[10]この定理は確率過程論の大学院生向けテキスト Karatzas and Shreve(1991) やØksendal(2005) などでは証明が厳密に展開されている．Shreve(2004) には分かりやすい証明が載っている．

定理 2.4 (Girsanov **の定理**)
$w(t)$, $0 \leq t \leq T$ を確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上の標準ブラウン運動、$\mathcal{F}(t)$ をこのブラウン運動のフィルトレーション、$\Theta(t)$ を $\mathcal{F}(t)$ に関して可測な過程であるとする．

$$Z(t) = \exp\{-\int_0^t \Theta(u)dw(u) - \frac{1}{2}\int_0^t \Theta^2(u)du\}, \tag{6}$$

$$\tilde{w}(t) = w(t) + \int_0^t \Theta(u)du \tag{7}$$

と定義する．ただし、

$$E\int_0^T \Theta^2(u)Z^2(u)du < \infty$$

と仮定する．$Z = Z(T)$ とおく．このとき、$EZ = 1$ であり、ラドン=ニコディム微分 Z により形成される確率測度 $\tilde{P}$ のもとで、確率過程 $\tilde{w}(t)$ は標準ブラウン運動となる．

確率過程 $\tilde{w}(t)$ は標準ブラウン運動なので、$d\tilde{w}d\tilde{w} = dt$ である．$dZ(t) = -\Theta(t)Z(t)dw(t)$ なので、

$$Z(t) = Z(0) + \int_0^t \Theta(u)Z(u)dw$$

と表現できる．$Z(t)$ は伊藤拡散過程なので、マーチンゲールとなっている．だから、$E[Z(T)] = Z(0) = 1$ が成立する．以上の結論は確率過程 Θ がベクトル値であっても成立する．

ファイナンス理論では、資産価格 S は通常、幾何的ブラウン運動

$$\frac{dS}{S} = \alpha dt + \sigma dw$$

に従うと仮定される．この解は

$$S(t) = S(0)\exp\{\int_0^t \sigma dw(s) + \int_0^t (\alpha - \frac{1}{2}\sigma^2)ds\}$$

である．時刻 t における (リスクフリー) 利子率を $r(t)$ とすると、割引率過程 D は

$$\frac{dD}{D} = -r(t)dt;\ D(t) = \exp\{\int_0^t -r(s)ds\}$$

で与えられる．資産価格の現在価値は

$$D(t)S(t) = S(0)\exp\{\int_0^t \sigma dw(s) + \int_0^t (\alpha - r(t) - \frac{1}{2}\sigma^2)ds\}$$

となる．また、

$$d(D(t)S(t)) = (\alpha(t) - r(t))D(t)S(t)dt + \sigma(t)D(t)S(t)dw(t)$$

である．ここで、

$$\Theta(t) = \frac{\alpha(t) - r(t)}{\sigma(t)}$$

とおくと、

$$d(D(t)S(t)) = \sigma(t)D(t)S(t)[\Theta(t)dt + dw(t)]$$

となる．この Θ はリスクの市場価格と呼ばれているものである．ここで Girsanov の定理を適用すると、

$$d(D(t)S(t)) = \sigma(t)D(t)S(t)d\tilde{w}(t)$$

なので、

$$D(t)S(t) = S(0) + \int_0^t \sigma(s)D(s)S(s)d\tilde{w}(s)$$

が成立している．確率測度 $\tilde{P}$ のもとでは、$\tilde{w}$ は標準ブラウン運動となっているので、伊藤積分はマーチンゲールである．よって、$D(t)S(t)$ はマーチンゲールとなっている．つまり、$\tilde{E}[D(t)S(t)] = S(0)$ である．$dw = d\tilde{w} - \Theta dt$ を資産価格の方程式に代入すると、

$$\frac{dS(t)}{S(t)} = r(t)dt + \sigma d\tilde{w}(t)$$

と変形できる．確率測度 $\tilde{P}$ のもとでは、資産価格の期待収益率は利子率になっている．この確率測度の導入によって、リスクが中立化されていることになる．確率測度 $\tilde{P}$ はリスクを中立化するのでリスク中立測度、あるいは資産価値をマーチンゲール化するのでマーチンゲール測度と呼ばれている．資産の現在価値は

$$D(t)S(t) = \tilde{E}[D(T)S(T)|\mathcal{F}(t)] = E[Z(T)D(T)S(T)|\mathcal{F}(t)],$$

と表現できる。この表現に登場する $Z(T)D(T)$ を状態価格密度 (stateprice density) という。$\alpha(t) = \alpha, r(t) = r, \sigma(t) = \sigma$ のとき、$\theta = (\alpha - r)/\sigma$ となり、

$$Z(t) = e^{-\theta t - \theta^2 t/2},\ D(t) = e^{-rt},$$

である。現時点での資産の価格 $S(0)$ は、$D(0) = 1$ なので

$$S(0) = E[Z(t)D(t)S(t)|\mathcal{F}(0)],$$

と計算できる。

3 確率的最適制御問題の解法

ここでの最適化問題は、システムの状態 $\xi(t)$ がマルコフ過程に従うとき、評価関数

$$J(t_0, x_0, \mathsf{u}) = E_{t_0,x_0}[\int_{t_0}^T L(t, \xi(t), u(t))dt + \Phi(T, \xi(T))]$$

を最大にする政策変数 u をフィードバック形式

$$u(t) = \mathsf{u}(t, \xi(t))$$

で求めることである．ここで、(t_0, x_0) はシステムの初期時刻と初期値、T は終端時刻である．評価関数 L に関しては、以下の条件が満たされていると仮定される．すなわち、

$$|L(t, x, u)| \leq C$$

が成立するような定数 C が存在する．

システムの状態が不確実なので、政策変数は観察された状態変数に依存するようなフィードバック関数を取る必要がある．この政策変数は Q^0 から U(ユークリッド空間の部分集合) へのボレル可測な関数と仮定される。システムの状態が政策変数 u に依存することを明示的に表現すると、システムを支配する確率微分方程式は

$$d\xi = f(t, \xi(t), u(t))dt + \sigma(t, \xi(t), u(t))dw \tag{8}$$

と表現される．通常、確率微分方程式に現れる関数 $f(t, x, u), \sigma(t, x, u)$ は C^1 関数であり、

$$\|f(t, 0, 0)\| \leq C,\ \|\sigma(t, 0, 0)\| \leq C$$
$$\|f_x\| + \|f_u\| \leq C,\ \|\sigma_x\| + \|\sigma_u\| \leq C$$

を満たす定数 C が存在すると想定されている．

動的計画法の価値関数は

$$W(s, y) = \sup_{\mathsf{u}} J(s, y, \mathsf{u})$$

で与えられる．ここで、(s, y) は時刻 s で直面する最適化問題における初期値である。最適化問題の解が u^* であるならば、すべての $(s, y) \in Q^0$ に対して $W(s, y) = J(s, y, \mathsf{u}^*)$ が成立する．前節の式 (5) において、$\psi = W$ とおくと、すべての $s < t \leq T$ に対して、

$$W(s, y) = -E_{sy}\int_s^t [W_s(r, \xi(r)) + \mathcal{A}(r)W(r, \xi(r))]dr + E_{sy}W(t, \xi(t)) \tag{9}$$

が成立する．

政策変数が最適な政策変数から乖離しているとき、例えば、

$$u_1(r, x) = \begin{cases} u(r, x), & r \leq t, \\ u^*(r, x), & r > t \end{cases}$$

であるとき、条件付期待値の性質から

$$E_{sy}[\int_t^T L(r, \xi(r), u(r))dr + \Phi(T, \xi(T))] = E_{sy}[E_{t,\xi(t)}\{\int_t^T L(r, \xi(r), u(r))dr + \Phi(T, \xi(T))\}]$$

であるので

$$J(s, y, \mathsf{u}_1) = E_{sy}\int_s^t L(r, \xi(r), u(r))dr + E_{sy}J(t, \xi(t), \mathsf{u}^*)$$

が成り立つ．当然のことながら、

$$W(t, \xi(t)) = J(t, \xi(t), \mathsf{u}^*)$$

が成立している．さらに、

$$W(s, y) \geq J(s, y, \mathsf{u}_1) = E_{sy}\int_s^t L(r, \xi(r), u(r))dr + E_{sy}W(t, \xi(t)) \tag{10}$$

が成り立つことも容易に理解できる．式 (10) から 式 (9) を引き算すると

$$0 \geq E_{sy}[\int_s^t W_s(r, \xi(r)) + \mathcal{A}(r)W(r, \xi(r)) + L(r, \xi(r), u(r))dr]$$

が得られる．$t \to s$ なる極限をとり、$v = u(s,y)$ と置けば

$$0 \geq W_s + \mathcal{A}(s)W + L(s,y,v)$$

が得られる．明らかに、$v = \mathsf{u}^*(s,y)$ になるとき、不等式は等式となる．ここで、確率的最適制御問題における動的計画法の基本方程式

$$W_s + \sup_{v \in U}[\mathcal{A}(s)W + L(s,y,v)] = 0 \tag{11}$$

が得られる．境界条件は

$$W(T,y) = \Phi(T,y)$$

である．(11) 式はハミルトン - ヤコビ - ベルマン (Hamilton-Jacobi-Bellam;HJB) 方程式と言われている．

確率過程が拡散過程であるならば、生成作用素 $\mathcal{A}$ は

$$\mathcal{A}(s)\Psi = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(s,y,v)\frac{\partial^2 \Psi}{\partial y_i \partial y_j} + \sum_{i=1}^{n} f_i(s,y,v)\frac{\partial \Psi}{\partial y_i} \tag{12}$$

で与えられる．この結果を用いると、以下の定理が成立する．

定理 3.1 (確率的最適制御問題の基本方程式)
$W(s,y)$ を動的計画法の基本方程式 *(ハミルトン - ヤコビ - ベルマンの方程式)*

$$W_s + \max_{v \in U}[\mathcal{A}(s)W + L(s,y,v)] = 0, \ (s,y) \in Q^0$$

の解であるとする．このとき、

(1). 許容されたフィードバック政策変数 u と任意の初期データ $(s,y) \in Q^0$ に対して、

$$W(s,y) \geq J(s,y,\mathsf{u})$$

である．

(2). u^* が許容されたフィードバック政策であり、すべての初期値データ $(s,y) \in Q^0$ に対して

$$\mathcal{A}(s)W + L(s,x,u^*) = \max_{v \in U}[\mathcal{A}(s)W + L(s,x,v)]$$

を満たすならば、$W(s,y) = J(s,y,\mathsf{u}^*)$ である．つまり、 u^* は最適解である．

この定理の証明は、Fleming and Rishel(1975) を参照してください．u が許容されたフィードバック政策であるための条件は、要約すると、u がボレル可測で、有界であること、そして、その政策が適用されたとき確率微分方程式 (8) の解が存在し、有界であることを要求する．関数 u の不連続な点の集合は測度ゼロであり、ほとんどすべての時刻で連続であることが要求される．

経済学で直面する最適化問題における目的関数は

$$J(0,x_0,\mathsf{u}) = E_{0,x_0}[\int_0^T L(t,\xi(t),u(t))e^{-\rho t}dt + \Phi(T,\xi(T))e^{-\rho T}]$$

と一般的に表現される。ここで、定数 ρ は限界時間選好率あるいは割引率と言われる。価値関数を

$$W(s,y) = \sup_{\mathsf{u}} E_{sy}[\int_s^T L(t,\xi(t),u(t))e^{-\rho(t-s)}dt + \Phi(T,\xi(T))e^{-\rho(T-s)}]e^{-\rho s}$$

とおき、新しく関数 $V(s,y)$ を

$$V(s,y)=\sup_{\mathsf{u}} E_{sy}[\int_s^T L(t,\xi(t),u(t))e^{-\rho(t-s)}dt+\Phi(T,\xi(T))e^{-\rho(T-s)}]$$

と定義する．つまり、

$$W(s,y)=V(s,y)e^{-\rho s}$$

なる関係が成り立つ。この関係式を、式 (11) に代入すれば、動的計画法のハミルトン-ヤコビ - ベルマン方程式は

$$V_s+\max_{v\in U}[\mathcal{A}(s)V+L(s,y,v)]=\rho V(s,y) \tag{13}$$

と定式化される．

経済学でのモデル分析では、経済学的な直感が重要な役割を果たすので、経済学的な概念と整合的な動的計画法の基本方程式の利用方法が有効である．ここで、経済学的な概念と整合的な動的計画法の基本方程式を導出する．

$$F(s,y,\mathsf{u})=E_{sy}[\int_s^T L(t,\xi(t),u(t))e^{-\rho(t-s)}dt+\Phi(T,\xi(T))e^{-\rho(T-s)}]$$

と関数 F を定義すると、

$$V(s,y)=\sup_{u} F(s,y,\mathsf{u})$$

という関係が成立している．

$$F(s+dt,y+dx,\mathsf{u})=E_{s+dt,y+dx}[\int_{s+dt}^T L(t,\xi(t),u(t))e^{-\rho(t-s-dt)}dt+\Phi(T,\xi(T))e^{-\rho(T-s-dt)}]$$

である．

$$F(s,y,\mathsf{u})=E_{sy}[\int_s^{s+dt} L(t,\xi(t),u(t))e^{-\rho(t-s)}dt+e^{-\rho dt}F(s+dt,y+dx,\mathsf{u})]$$

が成立する．限りなく小さな dt に対して

$$F(s,y,\mathsf{u})=E_{sy}[L(s,\xi(s),u(s))dt+e^{-\rho dt}F(s+dt,y+dx,\mathsf{u})]+o(dt)$$

が成立する。動的計画法における最適性の原理から

$$V(s,y)=\sup_{u} E_{sy}[L(s,\xi(s),u(s))dt+e^{-\rho dt}V(s+dt,y+dx)] \tag{14}$$

である．関係式

$$V(s+dt,y+dx)=V(s,y)+dV(s,y)+o(dt)$$

を (14) 式に代入すると、

$$V(s,y)=\sup_{u} E_{sy}[L(s,\xi(s),u(s))dt+e^{-\rho dt}V(s,y)+e^{-\rho dt}dV(s,y)]+o(dt)$$

となり、さらに、

$$e^{-\rho dt} = 1 - \rho dt + \frac{(\rho dt)^2}{2!} - \frac{(\rho dt)^3}{3!} + ...$$

を代入すると、

$$V(s,y) = \sup_u E_{sy}[L(s,\xi(s),u(s))dt + (1-\rho dt)V(s,y) + dV(s,y)] + o(dt)$$

となる。$dt \to 0$ とすると、(14) 式は最終的に

$$\rho V(s,y) = \max_v \{L(s,y,v) + \frac{1}{dt}E_{sy}[dV(s,y)]\} \tag{15}$$

なる関係式に帰着する．これが動的計画法の基本方程式となる．これを企業の投資行動での基本方程式と理解するならば、(15) 式の左辺は企業の所有者が要求する収益の大きさと理解される．他方、右辺の第１項は企業が獲得する利益の大きさで、第２項は企業価値のキャピタル・ゲインと理解されている．(15) 式は、企業所有者が要求する収益と企業所有者が予想する収益とが一致することを表現している．基本方程式 (15) に登場する $dV(s,y)$ は伊藤の公式を用いて計算できる．このとき、(15) 式は (13) 式に一致する．

4 オプション価格理論

この節では、オプション価格を複製ポートフォリオの作成と無裁定条件を用いて計算する手法を説明する．最初に、Merton(1973b) が提案した無裁定条件を用いる手法に基づいて、オプション価格が満たすべき偏微分方程式を導出する．この方程式を導出するに当たって、以下に記述されたような重要な仮定をする必要がある．

(1). 取引費用や税金などが存在せず、市場取引は連続的に行なわれ、空売りに関する制限はない．

(2). 資産市場には危険資産である株式が存在し、その価格は確率微分方程式

$$\frac{dS}{S} = \alpha dt + \sigma dz$$

に従う．ここで、α は当該株式の瞬時的期待収益率、σ^2 は収益率の瞬時的分散の大きさを表す．dz は標準ウイーナー過程 (ブラウン運動) の増分である．α と σ は時間に依存しない定数とする．

(3). 満期 T までの時間が τ である債券の価格 $B(\tau)$ は以下の確率微分方程式

$$\frac{dB}{B} = r(\tau)dt + \sigma_B(\tau)dw(t;\tau), \quad \tau = T - t$$

に従うとする．ここで、$r(\tau)$ は債券の瞬時的期待収益率、$\sigma_B(\tau)^2$ は収益率の瞬時的分散の大きさを表し、$dw(t;\tau)$ は標準ウイーナー過程の増分である．$r(\tau)$ は満期までの時間とともに変化する．この定式化の下では、利子の期間構造などを考慮して、異なる満期を持つ債券の価格の間に相関があるケースも取り扱える．その相関係数は 1 以下である．つまり、

$$dw(t;\tau)dw(t;T) = \rho_{\tau T}dt, \quad \rho_{\tau T} < 1 \text{ for } \tau \neq T.$$

他方で、資産市場の効率性仮説に従って

$$dw(s;\tau)dw(t;T) = 0, \text{ for } s \neq t; \quad dw(s;\tau)dz(t) = 0 \text{ for } s \neq t$$

を仮定する．債券には不履行リスクが伴わないとすると、満期時点で債券価格は 1 である、つまり $B(0) = 1$ である．また、$\sigma_B(0) = 0$ でもある．利子率が確率的な変動を示さず、時間に依存しない場合には、$r(\tau) = r$, $\sigma_B = 0$ であり、$B(\tau) = e^{-r\tau}$ である．

(4). 投資家の危険回避度に関する仮定は必要ないが、すべての投資家はパラメター α, σ, $r(\tau)$, σ_B の値に関して同一の予測値を持ち、ウイーナー過程 (z, w) の確率分布に関して共通の情報を保有すると仮定する．

以下での導出方法を簡単化するために、債券価格の撹乱項 dw はゼロと仮定する．$dB = rBdt$ となり、リスク・フリー利子率は r である．株式を原資産とするデリバティブの価値 H は債券の価格 B と満期までの時間 $\tau = T - t$、およびデリバティブの行使価格 E の関数となるので、$H = H(S, E, t)$ と表現できる．伊藤の公式をこの関数 H に適用すると、

$$dH = H_S dS + H_t dt + \frac{1}{2} H_{SS} dSdS$$

が得られる．ここで、H_x は変数 x に関する偏微分を表現する．

$$dSdS = \sigma^2 S^2 dt,$$

であることを用いると、

$$\frac{dH}{H} = \alpha_H dt + \sigma_H dz \tag{16}$$

となる．ただし、

$$\begin{aligned} \alpha_H &= [H_t + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 H_{SS} + \alpha S H_S]/H, \\ \sigma_H &= \sigma S H_S / H \end{aligned}$$

である．

株式、株式を原資産とするデリバティブ、および債券からなるポートフォリオを作成する．この債券の満期はオプションの満期と同一のものとする．資金ゼロでこのポートフォリオを作成する．例えば、借りてきた債券の売却資金で株式を購入するようにしてポートフォリオを構成する．このポートフォリオの初期価格はゼロとなっている．株式への投資額を n_1、デリバティブへの投資額を n_2、債券への投資額を n_3 とすると、$n_1 + n_2 + n_3 = 0$ である．ポートフォリオの瞬時的変動の大きさを dY と表記すると、

$$dY = n_1 \frac{dS}{S} + n_2 \frac{dH}{H} + n_3 \frac{dB}{B}$$

が成立する．dS, dH, dB を代入し、$n_3 = -n_1 - n_2$ を用いると、

$$dY = [n_1(\alpha - r) + n_2(\alpha_H - r)]dt + [n_1 \sigma + n_2 \sigma_H]dz$$

となる．すべてのリスクをヘッジするようにポートフォリオを構成するならば、

$$n_1 \sigma + n_2 \sigma_H = 0$$

が成立している．また、資産市場が効率的で裁定機会が存在しなければ、$dY = 0$ でなければならない．よって、

$$n_1(\alpha - r) + n_2(\alpha_H - r) = 0$$

である必要がある．この二つの条件から

$$\frac{\alpha - r}{\sigma} = \frac{\alpha_H - r}{\sigma_H}$$

が満たされなければならない．この条件式に α_H, σ_H の定義式を代入すれば、Black-Scholes の偏微分方程式

$$H_t + rSH_s + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 H_{ss} = rH \tag{17}$$

が得られる．デリバティブが満期時点 T のヨーロピアン・コールオプションであれば、境界条件が

$$H(S, E, T) = \max(S - E, 0); \quad H(0, E, t) = 0$$

となる．良く知られている通り、以下の定理が成立する[11].

定理 4.1 (Black-Scholes の公式)

境界条件

$$H(S, E, T) = \max(S - E, 0); \quad H(0, E, t) = 0$$

のもとで、偏微分方程式 (17) の解 $c(S, E, t) = H(S, E, t)$ は

$$c(S, E, t) = SN(d_1) - Ee^{-r\tau}N(d_2), \quad \tau = T - t \tag{18}$$

で与えられる．ここで、$N(\cdot)$ は正規分布の確率分布関数で、

$$d_1 = \frac{\ln(S/E) + (r + \frac{1}{2}\sigma^2)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}, \quad d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{\tau}$$

ある．

次に、オプション価格の評価式の代替的な導出方法について説明する．この方法も基本的に無裁定条件を必須として用いる．資金総額 X のうち ΔS を株式 (Δ 単位の株式) に投資し、残り $X - \Delta S$ をマネー・マーケットで運用するようなポートフォリオを作成する．今マネー・マーケットでのリスクフリー利子率を r とする．このポートフォリオの価値の期間 dt における上昇分は

$$dX = \Delta(t)dS(t) + r(X(t) - \Delta(t)S)dt = rX(t)dt + \Delta(t)(\alpha - r)S(t)dt + \Delta(t)\sigma S dz$$

である．$e^{-rt}X(t)$ にさらに伊藤の公式を適用すると、

$$d(e^{-rt}X(t)) = -re^{-rt}X(t)dt + e^{-rt}dX(t) = \Delta(t)(\alpha - r)e^{-rt}S(t)dt + \Delta(t)\sigma e^{-rt}S(t)dz \tag{19}$$

が得られる．株式 S を原資産とするデリバティブ (行使価格を E とし、満期が T であるヨーロピアン・コールオプション) の価値を $c(S, E, t)$ とする．この $c(S, E, t)$ に伊藤の公式を適用すると、

$$\begin{aligned} dc(S, E, t) &= c_t + c_S dS + \frac{1}{2}c_{SS}dSdS \\ &= [c_t + \alpha S c_S + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 c_{SS}]dt + \sigma S c_S dz \end{aligned}$$

[11] 1960 年代にブラウン運動を資産価格評価問題に導入したのは Samuelson であり、1960 年代末から 70 年代初期に彼の学生であった Merton がサミュエルソンのモデルを一般化した．Black と Scholes(1973) はサミュエルソンとマートンが定式化したモデルの延長線上で、オプション価格決定問題を議論した．この定理を最初に報告した論文は Black-Scholes(1973) であるが、その後、Merton(1973b) はこの結論を一般化している．この意味で、この公式は Black-Scholes-Merton の公式とも呼ばれている．詳しくは、Merton(1990) を参照してください．

となる．さらに、$e^{-rt}c(S,E,t)$ に伊藤の公式を適用すると、

$$d(e^{-rt}c(S,E,t)) = e^{-rt}[-rc + c_t + \alpha S c_S + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 c_{SS}]dt + e^{-rt}\sigma S c_S dz \tag{20}$$

が得られる．上記のポートフォリオ X とコールオプションの価値 c がすべての時刻 t で一致すように、すなわち、$e^{-rt}X(t) = e^{-rt}c(S,E,t)$ となるように、ポートフォリオを維持構成するとすれば、

$$d(e^{-rt}X(t)) = d(e^{-rt}c(S,E,t))$$

および $X(0) = c(S(0),E,0)$ が成立しなければならない．よって、(19) と (20) を等式で結ぶと、

$$\Delta(t)(\alpha - r)S(t)dt + \Delta(t)\sigma S(t)dz = [-rc + c_t + \alpha S c_S + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 c_{SS}]dt + \sigma S c_S dz$$

が得られる．この関係式が恒等式で成立するためには、

$$\Delta(t) = c_S(S,E,t)$$

および

$$\Delta(t)(\alpha - r)S(t) = -rc + c_t + \alpha S c_S + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 c_{SS}$$

が成立しなければならない．この両式から Black-Scholes の偏微分方程式

$$c_t(S,E,t) + rS(t)c_S(S,E,t) + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 c_{SS}(S,E,t) = rc(S,E,t)$$

が成立することが容易に分かる．複製ポートフォリオで株式の持分を $\Delta = c_S$ で与えることをデルタ・ヘッジという．Black-Scholes(1973) では、複製ポートフォリオを株式 1 単位のロング・ポジションと $1/\Delta$ 単位のオプションのショート・ポジションから構成すれば、リスクフリーのポートフォリオとなることを用いている．このリスクフリーのポートフォリオの収益率が r に等しくなる条件を使用すると、上記の結果が導出される．

ここで、リスク中立測度を導入すると、偏微分方程式を解かなくても Black-Scholes の公式が簡単に演繹できることを示す．割引率過程 $D(t) = \exp\{-rt\}$ とすると、(19) 式は

$$d(D(t)X(t)) = \Delta(t)\sigma D(t)X(t)d\tilde{z}$$

となる．ただし、$\theta = (\alpha - r)/\sigma$、$d\tilde{z} = dz + \theta dt$ である．マーチンゲール測度 $\tilde{P}$ のもとで、$\tilde{z}$ は標準ブラウン運動 (ウイーナー過程) であり、$D(t)X(t)$ はマーチンゲールとなる．この性質から、

$$D(t)X(t) = \tilde{E}[D(T)X(T)|\mathcal{F}(t)]$$

が成立する．$d(D(t)X(t)) = d(D(t)c(S(t),E,t))$ および $X(0) = c(S(0),E,0)$ であるので、Dc もマーチンゲールとなる。よって、

$$\exp\{-rt\}c(S,E,t) = \tilde{E}[\exp\{-rT\}\max(S(T)-E,0)|\mathcal{F}(t)]$$

である．この右辺を計算すると簡単に Black-Scholes の公式が得られる[12]．

上記の定式化では、原資産が株式という金融資産であった．リアル・オプションズでは、原資産は投資プロジェクトの実施から得られるキャッシュ・フロー流列の現在価値である．投資プロジェクトが工場建設

[12]期待値の具体的な計算過程の詳細については、Shreve(2004) の第 5 章を参照してください．

で、この工場から生産された製品の販売が生み出す利益がキャッシュ・フローとなる．投資プロジェクトが生み出す将来利益は、製品の将来価格の変化や生産費用の将来的変動に依存する．この将来利益の変動を的確に表現する確率微分方程式を定式化することが重要となる．投資プロジェクトの実施が遅れれば遅れるほど、得られたであろう利益機会をより多く失っていることになる．この事実は、コールオプションにおいて株式の配当金が果たす効果と同様の効果を明示的にモデルに導入することを要請する．機会費用の損失の大きさは単位時間当たり δ(資産 1 単位当たり) であるとすると、リアル・オプションを行使するまでの利益を支配する確率微分方程式は

$$d\tilde{S} = (\alpha - \delta)\tilde{S}dt + \sigma dz$$

とならなければならない．上記の手続きにおいて、デリバティブの価値の瞬時的上昇率 dY が配当金の大きさ分 $H_S\delta Sdt$ だけ減少することを考慮すると、(16) 式の α_H は

$$\alpha_H = [H_t + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 H_{SS} + (\alpha - \delta)SH_S]/H$$

と修正されなければならない．この修正の下で上記の手続きを繰り返すと、デリバティブの価値を支配する偏微分方程式は

$$H_t + (r - \delta)SH_s + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 H_{ss} = rH \tag{21}$$

となる．従って、対応する Black-Scholes-Merton の公式は

$$c(S, E, t) = e^{-\delta\tau}SN(d_1) - Ee^{-r\tau}N(d_2), \quad \tau = T - t$$

で与えられる．ここで、d_1, d_2 も

$$d_1 = \frac{\ln(S/E) + (r - \delta + \frac{1}{2}\sigma^2)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}, \quad d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{\tau}$$

と修正される[13]．単位時間当たりの類似配当額 δ はリアル・オプション・モデルでは”Covenience Yield”と呼ばれている．通常、”Covenience Yield”とは商品在庫を保有することで得られる便益のことを指している[14]．

金融資産のオプションとリアル・オプションの大きな相違点の一つは、金融資産のほとんどが市場で活発に取引されているが、リアル・オプションの対象となる原資産が市場ではほとんど取引されていない事実にある．投資プロジェクトが生み出す将来キャッシュフローの現在価値の計算で要求される割引率をどのように決定すべきかが重要な問題となる．対象となる投資プロジェクトの将来キャッシュフローに関わるリスクと類似のリスクを持つ金融資産を見出すことができれば話は簡単となる．あるいは、投資プロジェクトのリスクが計測できて、それと同様のリスクを持つ金融資産の存在を想定する必要がある．Merton(1973a) が定式化した ICAPM(Intertemporal Capital Asset Pricing Model) によれば、あらゆる資産のリスク・プレミアムは当該資産のリスクと市場ポートフォリオのリスクとの共分散に依存する．資産 i の均衡期待収益率を α_i とすると、その資産のリスクプレミアムは $\alpha_i - r = \lambda\rho_{iM}\sigma_i$ と与えられる．ここで、ρ_{iM} は市場ポートフォリオの収益率と資産 i の収益率との間の相関係数、σ_i は資産 i の標準偏差である．λ はリスクの市場価格といわれているもので、$\lambda = (\alpha_M - r)/\sigma_M$ と定義されている．ただし、α_M は市場ポートフォリオの均衡期待収益率、σ_M は市場ポートフォリオの収益率の標準偏差である．リアル・オプションの行使に

[13]配当金が支払われる場合の公式は Merton(1973b) で与えられているが、簡単な導出過程については、Shreve(2004) の第 5 章で展開されている計算過程を参照してください．

[14]穀物商品や鉱物商品のコンビニエンス・イールドに関する詳しい説明は、Brennan and Schwartz(1985) を参照してください．

よって生み出されるキャッシュフローのリスクが金融資産 i と同一のものであるならば、このリアル・オプションの価値を計算する際には、市場均衡において、上式で与えられる収益率 α_i と同一の期待収益率がこのリアルオプションの収益率に対して要求されるはずである．

5　事例１：稼動・停止 (参入・退出) オプション

最初に、稼動・停止オプションあるいは参入・退出オプションと呼ばれるリアルオプションの典型的なモデルを取り上げる．ある企業が新しい工場の建設計画プロジェクトを持っているとする．工場建設が行なわれた後、この工場からは時刻 t でキャッシュフロー $S(t)$ が生み出されるとする．ただし、生産が行なわれるためには、生産費用 $C(t)$ を投入する必要があるとする．従って、時刻 t における操業利益は

$$\pi(t) = \max[S(t) - C(t), 0]$$

となる．工場からのキャッシュフロー $S(t)$ は幾何ブラウン運動

$$\frac{dS}{S} = \alpha_S dt + \sigma_S dz_S$$

に従って変化すると仮定する．dz_S は当該キャッシュフローのリスクを表現する標準ウイーナー過程の増分である．時刻 s における利益 $\pi(s)$ に対する請求権の現在価値を $H(S(0), C(s), s)$ と表記する．

$$H(S(0), C(s), s) = e^{-rs}E_0\pi(s).$$

ここで、r はリスクフリー (安全資産の) 利子率、E_0 は現在時点における情報の下での条件付期待値オペレータである．この請求権は満期が s で、行使価格 $C(s)$ のコールオプションと同一で、$H(S(0), C(s), s)$ はこのコールオプションの現在価値と理解できる．時刻 t での請求権の価値は $H(S(t), C(s), s-t)$ となる．

$$H(S(t), C(s), s-t) = e^{-r(s-t)}E_t\pi(s).$$

ただし、E_t は時刻 t における情報の下での条件付期待値オペレータである．結論を見やすくするために、生産のために必要な費用 $C(t)$ の予想には不確実性が存在せず、時間にも依存せず、一定値を取ると仮定する[15]．

関数 H に伊藤の公式を適用すると ($C(s)$ を固定すると、S だけが確率過程なので)、

$$dH = H_t dt + \alpha_S S H_S dt + \frac{1}{2}\sigma_S^2 S^2 H_{SS} dt + \sigma_S S H_S dz_S$$

が得られる．よって、

$$dH = \alpha_H H dt + \sigma_H H dz_S$$

と表現できる．ただし、請求権 H の瞬時的期待収益率は

$$\alpha_H = [H_t + \alpha_S S H_S + \frac{1}{2}\sigma_S^2 S^2 H_{SS}]/H$$

であり、瞬時的分散の大きさは

$$\sigma_H^2 = (\sigma_S S H_S / H)^2$$

[15] 費用 $C(t)$ の予想に不確実性が伴うケースで、請求権の現在価値 H を導出することは省略する．不確実性が伴うケースに対して現在価値 H の挙動を支配する Black-Scholes-Merton の偏微分方程式を導出する詳細については、McDonald and Siegel(1985) を参照してください．

となっている．dH/H と dS/S の相関係数は

$$\rho_{HS} = \frac{\mathrm{Cov}(dH/H, dS/S)}{\sigma_H \sigma_S dt} = \frac{\sigma_H \sigma_S E[dz_S dz_S]}{\sigma_H \sigma_S dt} = 1$$

なので、両者は完全に相関している．市場ポートフォリオと請求権 H の収益率の共分散を計算すると、

$$\sigma_{HM} dt = \mathrm{Cov}(dH/H, dM/M) = \sigma_H \sigma_M E[dz_S dz_M] = \sigma_H \sigma_M \rho_{SM} dt$$

となるので、$\rho_{HM} = \rho_{SM}$ である．ここで、

$$\rho_{HM} \sigma_H = \rho_{SM} (\sigma_S S H_S / H)$$

なる関係式が成立する．投資家は請求権 H の期待収益率に対して ICAPM で計算される収益率を要求するとすれば、

$$\alpha_H - r = \lambda \rho_{HM} \sigma_H$$

が成立しなければならない．ここで、λ はリスクの市場価格である．この式に、$\rho_{HM}\sigma_H$ と α_H を代入すると、偏微分方程式

$$H_t + (r - \delta) S H_S + \frac{1}{2} \sigma_S^2 S^2 H_{SS} = rH \tag{22}$$

が得られる．ここで、

$$\delta = \alpha_H - \alpha_S; \quad \alpha_H = r + \lambda \rho_{SM} \sigma_S$$

とおいている．(22) 式は Black-Scholes-Merton の偏微分方程式を一般化した形式となっている．境界条件

$$H(S(s), C, s) = \max(S(s) - C, 0)$$

を与えるとき、この偏微分方程式の解は Black-Scholes の公式で与えられることは自明である．

以上の結果を用いて、投資プロジェクトの時刻 t での価値、言い換えると、投資実行オプションの価値を計算することが出来る．時刻 t で行使される操業オプションの現在価値は $H(S(0), C(t), t)$ であるから、工場建設によって生み出されるキャッシュフローの現在価値 V は

$$V(S, C, 0) = \int_0^T H(S(0), C(t), t) dt$$

となる．ここで、T は工場が稼動可能な時間の長さである．

次に、工場建設プロジェクトの現在価値 $V(S(t), C(t), t)$ が満たすべき偏微分方程式を導出する．この方程式を用いて工場建設プロジェクトの現在価値 $V(S(t), C(t), t)$ をキャッシュフロー $S(t)$ の関数として具体的に求めることを考える[16]．時刻 t における建設プロジェクトの価値 $V(S(t), C(t), t)$ が満たすべき関係を導出するために、複製ポートフォリオ作成の手法を活用する．この工場建設プロジェクトのオプション 1 単位と、工場が生産する生産物と類似のリスクを持つ商品 n 単位をショート・ポジションで保有するポートフォリオを作る．このポートフォリオ $Y = V - nS$ が期間 $(t, t + dt)$ 内に生み出す収益は $dY = dV - ndS$ であり、工場を操業することから得られる利潤は $\pi(t)dt$ である．また、ショート・ポジションに伴って支

[16] この手法は Brennan and Schwartz(1985) が最初に用いた方法であり、その後、Dixit and Pindyck(1994) などの研究で多用されている．

払う必要のある金額はいわゆるコンビニエンス・イールド δ で表現される．従って、ポートフォリオがもたらす収益は

$$\begin{aligned} dV - ndS + \pi(t)dt - \delta nSdt &= [V_t + \frac{1}{2}\sigma_S^2 S^2 V_{SS} + \alpha_S S V_S - n\alpha_S S - \delta nS + \pi(t)]dt \\ &\quad + (V_S \sigma_S S - n\sigma_S S)dz_S \end{aligned}$$

と計算される．$n = V_S$ とおくと、右辺第 2 項がゼロとなり、このポートフォリオからリスクが消去される．よってその収益率は安全資産の収益 $r(V - nS)$ に等しくならなければならない．つまり、

$$V_t + \frac{1}{2}\sigma_S^2 S^2 V_{SS} + (r - \delta)SV_S + \pi(t) = rV \tag{23}$$

が成立する．このことは、工場建設プロジェクトの価値 V が Black-Scholes-Merton の偏微分方程式に従うことを示している．

利潤 π が時間に陽表的に依存しないならば、工場建設オプションの価値 V は時刻 t には陽表的に依存しない．それ故、$V_t = 0$ とおける[17]．この偏微分方程式を解析的に解くことを試みる．時刻 t で $S < C$ のとき、操業オプションは行使されず、操業が停止され、$\pi(t) = 0$ なので、

$$\frac{1}{2}\sigma_S^2 S^2 V_{SS} + (r - \delta)SV_S = rV \tag{24}$$

となる．時刻 t で $S > C$ のとき、操業オプションは行使され、

$$\frac{1}{2}\sigma_S^2 S^2 V_{SS} + (r - \delta)SV_S + S - C = rV \tag{25}$$

が成立する．式 (24) の解は

$$V(S, C) = A_1 S^{\beta_1} + A_2 S^{\beta_2}$$

と表現できる．ここで、定数 A_1, A_2 は未定係数で境界条件から定まる．β_1, β_2 は

$$\frac{1}{2}\sigma_S^2 \beta(\beta - 1) + (r - \delta)\beta - r = 0 \tag{26}$$

の解である．$\beta_1 < \beta_2$ とすると、あきらかに、$\beta_1 < 0$, $\beta_2 > 1$ である．$S < C$ のとき、$S \to 0$ となることが起こりうる．このケースで、V の値が有限に定まるためには、$A_1 = 0$ となる必要がある．よって、

$$V(S, C) = A_2 S^{\beta_2}.$$

式 (25) の解として

$$V(S, C) = B_1 S^{\beta_1} + B_2 S^{\beta_2} + \frac{S}{\delta} - \frac{C}{r}$$

を仮定する．これが解になることは、この関数形を元の式 (25) に代入してみると明らかとなる．ここで、定数 B_1, B_2 は未定係数で境界条件から定まる．生産物の価格 S が非常に大きくなるとき、$\beta_2 > 1$ なので、$B_2 \neq 0$ でない限り、V の値が無限大になってしまう．これを除外するためには、$B_2 = 0$ としなければならない．よって、

$$V(S, C) = B_1 S^{\beta_1} + \frac{S}{\delta} - \frac{C}{r} \quad .$$

[17] ここで、生産費用は時間に依存せず、不確実性を伴わないと仮定している．

時刻 t 以降、工場を操業し続ける場合[18]、工場が生み出すキャッシュフローの現在価値の期待値は

$$E_t \int_0^\infty S(t+s)e^{-\mu s}ds = \int_0^\infty S(t)e^{\alpha_S s}e^{-\mu s}s = \frac{S(t)}{\mu - \alpha_S}$$

と計算される．生産費用が変化せず一定であると仮定しているので、総生産費用の現在価値は C/r となる．収益の割引率は同一リスクの金融資産の均衡収益率 $\mu = r + \lambda\sigma_S\rho_{SM}$ に等しくなければならない．生産費用に対する割引率はリスクがないのでリスクフリー利子率に等しい．上での議論から、コンビニエンス・イールドは $\delta = \mu - \alpha_S$ と定義される．よって、時刻 t における操業オプションの価値 V の第２項、第３項の和 $S(t)/\delta - C/r$ は操業を無限遠方まで続ける場合の利益の現在価値を表現する．第１項は、将来に $S < C$ が起きたとき、操業を停止するオプションを行使し、このことにより得られる利益の増加分の現在価値、すなわち操業停止オプションの価値を表現していると理解できる．まとめて、工場建設プロジェクトを所有する (投資オプションの) 価値 V は

$$V(S,C) = \begin{cases} B_1 S^{\beta_1} + \frac{S}{\delta} - \frac{C}{r} \quad , & S > C \text{ の場合} \\ A_2 S^{\beta_2}, & S < C \text{ の場合} \end{cases}$$

と表現できる．未定係数 B_1 と A_2 は $S = C$ における境界条件から定まる．

生産物の価格が $S(t) = C$ をクロスして変化するとき、確率過程 $S(t)$ のサンプル経路が連続なので、現在価値 $V(S,C)$ も連続的に変化する必要がある．よって、$S(t) = C$ において、

$$A_2 S^{\beta_2} = B_1 S^{\beta_1} + \frac{S}{\delta} - \frac{C}{r} \tag{27}$$

が成立する．さらに、現在価値 $V(S,C)$ が $S(t) = C$ において滑らかに変化すること、つまり微分可能であることが要求されるので、

$$A_2\beta_2 S^{\beta_2 - 1} = B_1\beta_1 S^{\beta_1 - 1} + \frac{1}{\delta} \tag{28}$$

である[19]．これらを連立させて、$A_2,\ B_1$ に関して解くことができる．結果として、

$$A_2 = \frac{C^{1-\beta_2}}{\beta_2 - \beta_1}\left(\frac{\beta_1}{r} - \frac{\beta_1 - 1}{\delta}\right);\ B_1 = \frac{C^{1-\beta_1}}{\beta_2 - \beta_1}\left(\frac{\beta_2}{r} - \frac{\beta_2 - 1}{\delta}\right)$$

を得る．$r,\ \delta,\ C$ に数値を与えて、関数 $V(S,C)$ の具体的な関数形を求めて、グラフを描くことは容易にできる[20]．

以上のモデル分析を応用すれば、Dixit(1989) が定式化したような企業行動、例えば、企業の市場への新規参入と市場からの退出行動の問題を分析することが容易にできる．稼動オプションを参入オプション、稼動停止オプションを退出オプションと解釈し直す．操業政策の問題では、$S > C$ の時には操業すると定式化されたが、参入問題では $S > S_H$ のときに参入するような臨界的参入収益 S_H が存在する．同様に、$S < S_L$ のときは退出するという臨界的退出収益の水準が存在する．参入している状態での企業の価値を V、退出した後での企業の価値を W と表記する．Black-Scholes-Merton の偏微分方程式を導出する手続きは全く同一なので、

$$\frac{1}{2}\sigma_S^2 S^2 W_{SS} + (r-\delta)SW_S = rW, \tag{29}$$

$$\frac{1}{2}\sigma_S^2 S^2 V_{SS} + (r-\delta)SV_S + S - C = rV \tag{30}$$

[18] ここでは、工場の稼動可能な期間が無限大であることを仮定しているが、稼動可能な期間が有限時間 T であるケースについても同様に議論できる．

[19] コーシー問題の解 (Black-Scholes-Merton の偏微分方程式の解) が確率過程 S の連続関数で、微分可能でなければならないという条件は Karatzas and Shreve(1991) の定理 4.4.9 を参照して下さい．

[20] Dixit and Pindyck(1994, Chapter 6) は、$r = \delta = 0.04,\ C = 10$ と与えて、標準偏差 $\sigma_{\mathrm{S}} = 0,\ 0.02,\ 0.4$ のそれぞれに対して、具体的な計算結果をグラフに描いている．

が成り立つ．よって、

$$\begin{aligned} W(S,C) &= AS^{\beta_2}, \quad S < S_L \text{の場合}, \\ V(S,C) &= BS^{\beta_1} + \frac{S}{\delta} - \frac{C}{r}, \quad S > S_H \text{の場合} \end{aligned}$$

となる．新規市場に参入するときは、c_e の大きさの参入費用が、市場から退出するときには c_o の大きさの退出費用が必要とされるとする．これを考慮すると、境界条件および平滑接続の条件は

$$\begin{aligned} W(S_H) &= V(S_H) - c_e;\ V(S_L) = W(S_L) - c_o, \\ W_S(S_H) &= V_S(S_H);\ V_S(S_L) = W_S(S_L) \end{aligned}$$

と表現できる．境界条件および平滑連続の条件を用いて、係数 A, B および臨界値 S_H, S_L を決定することができる．実際にこうした計算をすると、

$$S_H > C + rc_e;\ S_L < C - rc_o$$

という関係が成立つことが分かる[21]．この政策は S_H と S_L を上下のトリガーとする典型的な bang-bang(Ss) タイプの政策である．参入閾値 S_H と退出閾値 S_L の間のスプレッドは、通常のマーシャル的な収益計算から求められるスプレッド値に比較して大きくなる．すなわち、将来収益の不確実性を考慮する企業は市場に新規参入することにより慎重となり、市場で操業している既存企業は市場から退出することにより慎重となる．

最後に、動的計画法を用いて Black-Scholes-Merton の偏微分方程式を導出する方法を考える．ここで考察すべき確率的最適制御問題は目的関数

$$V(S,C,0) = E_0 \int_0^{\infty} \pi(s) e^{-rs} ds$$

を最大にするような操業政策 $u(t)$ を求めることである．操業政策 $u(t)$ を $\pi(s) = \max[S(s) - C(s), 0]$ となるような政策とすれば、目的関数は最大化される．

$$V(S,C,t) = E_t \int_t^{\infty} \pi(s) e^{-r(s-t)} ds$$

とおく．将来のキャッシュフローの割引率をリスクフリー率としているので、将来のキャッシュフローの成長率の評価は、実際の成長率からリスクプレミアム分を差し引いた大きさにならなければならない．よって、工場からのキャッシュフローは

$$\frac{dS}{S} = (\alpha_S - \mu + r)dt + \sigma_S dz_S$$

に支配される．$\alpha_S - \mu + r = r - \delta$ となっている．従って、ハミルトンーヤコビの偏微分方程式は

$$V_t + (r - \delta)SV_S + \sigma_S^2 S^2 \frac{1}{2} V_{SS} + \pi(t) = rV$$

となる．これは先に導出した Black-Scholes-Merton の偏微分方程式と同じものである．後は上記と同じ手続きに従って解を求めればよい．工場が生産する生産物価格のリスクと同等なリスクを持つ金融商品を見出すことができない場合、金利裁定条件を用いて Black-Scholes-Merton の偏微分方程式を導出することができない．この場合、動的計画法を用いて分析する方法が有効となる．

[21]具体的な計算過程については、Dixit(1989) を参照してください．

6　事例2：投資プロジェクトの実施時期の決定問題

投資額 K を投資するならば、毎期生産量 Q の製品が生産できる工場を建設する投資プロジェクトを考える．投資の実行には長期の時間は必要とされず、瞬時に実行できると仮定する．別の言い方をすると、生産が開始されるまでの期間に投資される額を生産開始の時点での現在価値額を K と考えても良い．投資プロジェクトの最適実施タイミングの問題を分析するために、工場建設が実行され、工場が稼動して以降の操業停止オプションが取れないケースを考える．モデルを特定化するために、工場からの生産量 Q は資本ストック K と労働投入量 L の Cob-Douglas 型生産関数によって定まるとする．

$$Q == L^{\alpha}K^{1-\alpha},\ 0 < \alpha < 1.$$

企業の直面する需要量は逆需要関数

$$P(t) = Q(t)^{(1-\phi)/\phi}\theta(t)^{\varphi}, \phi \geq 1,\ \varphi > 0$$

によって与えられるとする．ここで、P は製品の市場価格、$\xi = \phi/(\phi - 1)$ は需要の価格弾力性である．通常、$\xi > 1$ と仮定できる．$\theta(t)$ は需要量に影響を与える確率的な変動項である．この市場での需要量に作用する撹乱項は確率微分方程式

$$\frac{d\theta}{\theta} = \alpha_{\theta}dt + \sigma_{\theta}dz_{\theta} \tag{31}$$

に従う．dz_{θ} は標準ウイーナー過程の増分である．言うまでもなく、この定式化は当該企業が独占的な価格支配力を有すると仮定している[22]．時刻 t での利潤は

$$\pi(t) = P(t)Q(t) - wL(t)$$

である．$L(t)$ は時刻 t での労働投入量、w は賃金率である．各時刻 t で企業は利潤を最大化するように労働投入量 $L(t)$ を調整できると仮定する．最適な労働投入量のもとでは利潤は

$$\pi(t) = k\theta(t)^{\gamma}$$

となる．ただし、k は

$$k = (1 - \frac{\alpha}{\phi})(\frac{\alpha}{\phi}\frac{1}{w})^{(\frac{\alpha}{\phi})/(1-\frac{\alpha}{\phi})}K^{(1-\alpha)/(\phi-\alpha)}$$

と定義される資本ストック K に依存する係数で、

$$\gamma = \frac{\varphi\phi}{\phi - \alpha} > 0$$

である．市場価格の変動が外的撹乱に比例して変化するとき、すなわち $\varphi = 1$ のとき、$\gamma > 1$ となる．投資の調整費用を無視すれば、工場建設の投資額は資本ストック K と同一と想定しても良い．工場の操業期間を T とすると、時刻 t で操業を開始した工場から生み出される総キャッシュフローの期待現在価値は時刻 t で

$$X(t) = E_t\int_0^T \pi(t+s)e^{-\mu s}ds$$

[22] 完全競争市場を想定する場合、収益関数の価格弾力性が異なるだけで、結論の定性的な特徴は変化しない．

である．ここで μ は当該投資プロジェクトに対する割引率である．π に伊藤の公式を適用すれば、

$$\frac{d\pi}{\pi} = \{\gamma\alpha_\theta + \frac{1}{2}\gamma(\gamma-1)\sigma_\theta^2\}dt + \gamma\sigma_\theta dz_\theta$$

であるので、

$$E_t\pi(t+s)e^{-\mu s} = \pi(t)\exp\{\gamma\alpha_\theta + \frac{1}{2}\gamma(\gamma-1)\sigma_\theta^2\}s - \mu s\}$$

が成り立っている．よって、

$$X(t) = k\frac{\theta^\gamma(t)}{\alpha_X - \mu}\{e^{(\alpha_X-\mu)T} - 1\}$$

が得られる．ここで、

$$\alpha_X = \gamma\alpha_\theta + \frac{1}{2}\gamma(\gamma-1)\sigma_\theta^2$$

である．期待収益の現在価値が有限の大きさにとどまるためには、$\alpha_X < \mu$ が必要である．以下、これを仮定する．X に伊藤の公式を適用すると、

$$\frac{dX}{X} = \alpha_X dt + \sigma_X dz_\theta \tag{32}$$

が成立する．ただし、$\sigma_X = \gamma\sigma_\theta$ である．

工場を建設するための投資資金が現在時点で確定できず、不確実を伴っていることが多い．ここで、必要な投資資金 K が確率微分方程式

$$\frac{dK}{K} = \alpha_K dt + \sigma_K dz_K \tag{33}$$

に従うと仮定する．dz_K は投資資金の確定に伴う不確実性を支配する標準ウイーナー過程の増分である．最適投資タイミングの問題は

$$J(t_0) = e^{-\mu t_0}E_0\max[X(t_0) - K(t_0), 0]$$

を最大にする投資の実施時刻 (投資オプションの行使時刻）t_0 を求めることである．動的計画法を用いて、ハミルトンーヤコビの方程式を導出する．価値関数を

$$V(X, K, t) = \max_{t_0} e^{-\mu(t_0-t)}E_t\max[X(t_0) - K(t_0), 0], \quad 0 < t < t_0$$

とおくと、ハミルトンーヤコビの方程式

$$V_t + \max_{t_0}[V_X\alpha_X X + V_K\alpha_K K + \frac{1}{2}V_{XX}\sigma_X^2X^2 + \frac{1}{2}V_{KK}\sigma_K^2K^2 + V_{XK}XK\sigma_{XK}] = \mu V$$

が得られる．パラメター α_X, σ_X, α_K, σ_K, σ_{XK} が時間に依存しない限り、$V_t = 0$ が成り立つので、

$$\max_{t_0}[V_X\alpha_X X + V_K\alpha_K K + \frac{1}{2}V_{XX}\sigma_X^2X^2 + \frac{1}{2}V_{KK}\sigma_K^2K^2 + V_{XK}XK\sigma_{XK}] = \mu V \tag{34}$$

となる．

次に、動的計画法の代替的方法である複製ポートフォリオの手法を用いて、類似の偏微分方程式を導出する．投資プロジェクトのオプション 1 単位、生産物 N_1 単位のショート・ポジション、投資財 N_2 単位のショート・ポジションからなるポートフォリオを作成する．伊藤の公式から

$$\begin{aligned} d(V - N_1X - N_2K) \quad &= \quad dV - N_1dX - N_2dK \\ = (V_X - N_1)dX \quad &+ \quad (V_K - N_2)dK + [V_t + \frac{1}{2}V_{XX}\sigma_X^2X^2 + \frac{1}{2}\sigma_K^2V_{KK}K^2 + V_{XK}XK\sigma_{XK}]dt \end{aligned}$$

を得る．$N_1 = V_X$, $N_2 = V_X$ とすると、このポートフォリオはリスクフリーとなる．ショート・ポジションを維持するためには、生産物および投資財の貸与に対して convenience yiled を払う必要があるので、このポートフォリオの保有から得られる収益率は

$$
\begin{aligned}
d(V - N_1 X - N_2 K) &- (N_1\delta_1 X + N_2\delta_2 K)dt \\
= [V_t - \delta_1 V_X X &- \delta_2 V_K K + \frac{1}{2}V_{XX}\sigma_X^2 X^2 + \frac{1}{2}V_{KK}\sigma_K^2 K^2 + V_{XK}XK\sigma_{XK}]dt
\end{aligned}
$$

である．δ_1 は X に対するコンビニエンス・イールド、δ_2 は K に対するコンビニエンス・イールドの大きさである[23]．このポートフォリオはリスクフリーなので、その収益は $r(V - N_1 X - N_2 K)dt$ とならなければならない．この条件から、オプションの価値を支配する偏微分方程式

$$
V_t + (r - \delta_1)V_X X + (r - \delta_2)V_K K + \frac{1}{2}V_{XX}\sigma_X^2 X^2 + \frac{1}{2}V_{KK}\sigma_K^2 K^2 + V_{XK}XK\sigma_{XK} = rV \tag{35}
$$

が得られる．パラメター α_X, σ_X, α_K, σ_K, σ_{XK} が時間に依存しない限り、投資オプションの価値 $V(X,K,t)$ は時間に依存しないので、$V_t = 0$ となっている．

偏微分方程式 (34) と偏微分方程式 (35) は全く同一形式の方程式である．異なるのは、係数のみである．偏微分方程式 (34) における α_X, α_K, μ は偏微分方程式 (35) での $r - \delta_1$, $r - \delta_2$, r にそれぞれ対応している．偏微分方程式 (34) の導出においては、X と K を保有することに伴うコンビニエンス・イールドが無視されており、割引率 μ が適切に定義されていない．他方で、偏微分方程式 (35) の導出では、それらの要素が取り込まれている．こうしたことの故に、形式は同一でも、用いられる係数に相違が生じる。このことから、動的計画法を用いる場合、コンビニエンス・イールドを含めて、X と K を支配する確率微分方程式は

$$
\frac{dX}{X} = (r - \delta_1)dt + \sigma_X dz_X \tag{36}
$$

$$
\frac{dK}{K} = (r - \delta_2)dt + \sigma_K dz_K \tag{37}
$$

と定式化すべきである．そして、割引率はリスクフリー利子率を採用すべきであると言うことになる．この定式化は、ファイナンス理論での確率中立測度、いわゆるマーチンゲール測度を用いたデリバティブ価格決定理論における定式化に対応している．

投資プロジェクトが実行される時刻では

$$
V(X,K) = X - K
$$

が成立し[24]、関数 V が滑らかに連続している性質を用いれば、

$$
V_X(X,K) = 1,\ V_K(X,K) = -1
$$

が成立しなければならない．これらが偏微分方程式の境界条件である．

微分方程式 (35) の一般的な解を解析的に求めることは容易ではない．しかし、ここでの問題では、$V(X,K)$ が X と K に関して１次同次なので、解析解を容易に求められる．任意の係数 a に対して、$X' = aX$, $K' = aK$ とおいて、問題を再定式化すると、その問題に対する解は、上記の問題の解と同一となることが分かる．この事実を活用して、

$$
V(X,K) = Kv(x),\ x \equiv X/K
$$

[23] コンビニエンス・イールドをどのように定義すべきかという議論は残る．通常、コンビニエンス・イールドは、当該資産が実際に生み出す収益率の期待値と、当該資産のリスクと同一リスクを持つ金融資産の均衡収益率の期待値 (CAPM より計算される) との差異として定義されている．ここでは、$\delta_1 = r + \lambda\sigma_{\mathrm{X}}\rho_{\mathrm{X\,M}} - \alpha_{\mathrm{X}}$, $\delta_2 = \lambda\sigma_{\mathrm{K}}\rho_{\mathrm{K\,M}} - \alpha_{\mathrm{K}}$ としている．λ はリスクの市場価格である．

[24] V が時間 t に依存しないので、時間パラメターは省略している．

とおく．関係式

$$
\begin{aligned}
V_X &= v'(x),\ V_K = v(x) - xv'(x), \\
V_{XX} &= v''(x)/K,\ V_{XK} = -xv''(x)/K,\ V_{KK} = x^2 v''(x)/K
\end{aligned}
$$

が成立する．これらの関係式を微分方程式 (35) に代入して、整理すると、

$$
\frac{1}{2}(\sigma_X^2 + \sigma_K^2 - 2\sigma_{XK})x^2 v''(x) + (\delta_2 - \delta_1)xv'(x) - \delta_2 v(x) = 0 \tag{38}
$$

が得られる．これは通常の 2 階常微分方程式なので、容易に解ける．境界条件は

$$
v(x) = x - 1
$$

および

$$
v'(x) = 1,\ v(x) - xv'(x) = -1
$$

となる．

$$
v(x) = Ax^\beta
$$

とおくと、上の 2 階常微分方程式から、指数 β は

$$
\frac{1}{2}(\sigma_X^2 + \sigma_K^2 - 2\sigma_{XK})\beta(\beta - 1) + (\delta_2 - \delta_1)\beta - \delta_2 = 0
$$

を満たさなければならない．この特性方程式の解を $\beta_1,\ \beta_2$ とする．大きい方の解を β_2 とすると、$\beta_1 < 0,\ \beta_2 > 1$ となる[25]．$v(0) = 0$ でなければならないので、関数 v において指数 β_1 の項の係数はゼロとなる．よって、

$$
v(x) = Ax^{\beta_2}
$$

である．これより、

$$
V(X, K) = AK(X/K)^{\beta_2}
$$

である．$x \geq \bar{x}$ のとき投資が実行されるとすると、投資が実行される時刻では、$v'(\bar{x}) = 1$ だから

$$
A\beta_2 \bar{x}^{\beta_2} \bar{x}^{-1} = 1
$$

であるので、$v(\bar{x}) = \bar{x}/\beta_2$ となる．さらに、境界条件 $v(\bar{x}) = \bar{x} - 1$ より

$$
\bar{x} = \frac{\beta_2}{\beta_2 - 1}
$$

が得られる．このことから、投資は

$$
\frac{X}{K} \geq \bar{x} \equiv \frac{\beta_2}{\beta_2 - 1} > 1
$$

が満たされる時刻で実行される．ここで、

$$
\beta_2 = \frac{1}{2} - \frac{\delta_2 - \delta_1}{\sigma^2} + \sqrt{(\frac{1}{2} - \frac{\delta_2 - \delta_1}{\sigma^2})^2 + \frac{2\delta_2}{\sigma^2}}, \quad \sigma^2 = \sigma_X^2 + \sigma_K^2 - 2\sigma_{XK}
$$

[25] 条件 $\delta_1 > 0$ が成立していると仮定した．

である．$f(\beta_2,\sigma) \equiv (1/2)\sigma^2\beta_2(\beta_2-1)+(\delta_2-\delta_1)\beta_2-\delta_2=0$ の両辺を σ で全微分すると、

$$\frac{\partial f}{\partial \beta_2}\frac{\partial \beta_2}{\partial \sigma}+\frac{\partial f}{\partial \sigma}=0$$

が得られる．ここで、

$$\frac{\partial f}{\partial \beta_2}=\sigma^2\sqrt{(\frac{1}{2}-\frac{\delta_2-\delta_1}{\sigma^2})^2+\frac{2\delta_2}{\sigma^2}}>0$$

であり、

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma}=\sigma\beta_2(\beta_2-1)>0$$

なので、

$$\frac{\partial \beta_2}{\partial \sigma}<0$$

となることが分かる．つまり、σ が増大すると、β_2 が減少する．したがって、$\beta_2/(\beta_2-1)$ は増大する．このことは、比率 X/K に関するリスクのボラティリティー $\sigma_X^2+\sigma_K^2-2\sigma_{XK}$ が増大すると、それにつれて、投資の閾値 $\bar{x}$ が大きくなることを意味する[26]．時刻 t における収益の現在価値は

$$X(t)=k\frac{\theta^{\gamma}(t)}{\delta_1}\{1-e^{-\delta_1 T}\},\quad \delta_1=\mu-\alpha_X$$

であるから、最適な投資の実行時期は、確率過程 $\theta(t)$ のサンプル経路が

$$k\frac{\theta^{\gamma}(t_0)}{\delta_1}\{1-e^{-\delta_1 T}\}\geq\frac{\beta_2}{\beta_2-1}K(t_0)$$

を満たす t_0 となる．

7　事例３：投資の調整費用と不可逆性

企業の実物投資行動を的確にモデル化することは、マクロ経済の動学理論および企業行動の理論を構築するうえで、極めて重要な役割を担っている．周知の通り、企業の投資行動の伝統的な静学理論では、資本の限界収益と資本のユーザー・コストとが一致するように投資が決定されると想定されてきた．この静学的なモデルでは、企業は費用をかけずに瞬時のうちに資本ストックが調整可能であると仮定されている．しかし、資本ストックを調整する際には調整費用が発生するという認識が重要視されるならば、そして、収益の将来予想が現在の投資に影響を与えるという想定が現実性をもたらすならば、投資行動は確率動学的な枠組みの中で定式化されなければならない．企業の投資行動を確率動学的なモデルに基づいて分析する研究の代表的な文献は、Pindyck(1982)、Abel(1983, 85)、Abel and Eberly(1994, 96, 99) などである．他方で、Arrow(1968 年) の指摘以降、企業の投資行動における投資の不可逆性の問題も重要視されつつあった．投資の不可逆性とは、企業がある投資を実行した後、その投資を取り消して、投資がなかった状態に戻すことはできないことをいう．いったん据え付けられた資本設備は企業固有のものであり、あるいは産

[26]詳しくは、MacDonald and Siegel(1986) および Dixit and Pindyck(1994) を参照してください．投資の閾値 $\bar{x}$ が大きくなることが投資の実行時期を先送りすることを含意するか否かについては、議論のあるところである．こうした議論に関しては、Sakar(2000)、Gryglewicz et al(2008)、Wong(2007) など参照してください．

業固有のものであり、他の産業等に転用することは困難である．投資が不可逆的であるとは、建設した資本設備を中古市場で売却できない場合に相当する．中古市場で安く売却できる場合には、部分的不可逆性といわれている．この投資の不可逆性を考慮して企業の投資行動を分析する手法としてリアル・オプションの考え方が採用されてきた．典型的な研究は Bernanke(1983)、Bertola and Caballero(1994)、Abel and Eberly(1996)、Abel et al.(1996) などである．

この節では、投資の調整費用と不可逆性を明示的に定式化した投資行動のモデル分析を行う．資本と労働を投入してある商品を生産する企業を考える．企業は需要サイドで発生する外的撹乱に依存する操業利潤を得ていると仮定する．時刻 t でのこの経常利潤の大きさを $\pi(K(t), X(t))$ と表記する．$K(t)$ と $L(t)$ は時刻 t での資本ストックと労働投入量、$X(t)$ は時刻 t での需要サイドでの撹乱項である．

生産は生産関数

$$y = F(L, K) = L^{\alpha}K^{1-\alpha},\ 0 < \alpha < 1. \tag{39}$$

にしたがって行われる．企業が直面す需要曲線は

$$P(t) = Q(t)^{(1-\phi)/\phi}X(t)^{\varphi}, \phi \geq 1,\ \varphi > 0, \tag{40}$$

で与えられる．ただし、$P(t)$ は時刻 t での市場価格、$Q(t)$ は市場での総供給量．市場が完全競争市場であるとき、関係式 $\phi = 1$ が成立する．$\varphi = 1$ であるとき、市場価格は撹乱項に比例する．$Q = Ny$ ($N = 1$ は企業の総数）と仮定する．経常利潤は w を賃金率とするとき、$\pi(K, X) = P(t)L^{\alpha}K^{1-\alpha} - wL(t)$ で与えられる．この経常利潤は具体的に計算すると、

$$\pi(K(t), X(t)) = hX(t)^{\nu}K(t)^{\beta}, \tag{41}$$

となる．ただし、

$$\begin{aligned} h &= (1 - \frac{\alpha}{\phi})(\frac{\alpha}{\phi}\frac{1}{w})^{(\frac{\alpha}{\phi})/(1-\frac{\alpha}{\phi})}, \\ \nu &= \frac{\varphi\phi}{\phi - \alpha} > 0, \\ \beta &= \frac{1-\alpha}{\phi - \alpha} \leq 1. \end{aligned}$$

明らかに、$\pi_K > 0, \pi_{KK} \leq 0, \pi_X > 0$．利潤は資本ストックの凹関数となっている． $\nu > 1$ ならば、利潤は外的撹乱の凸関数となっている．$\nu < 1$ ならば、利潤は外的撹乱の凹関数となっている． $\nu > 1$ となるのは、$\varphi > 1 - \alpha/\phi$ が成立するときだけである．このことは、資本の限界収入が資本の減少関数となるが、パラメターに依存して外的撹乱の減少関数、あるいは増加関数になることを意味する[27]．市場が完全競争的であれば、利潤は資本の線形関数となる．

外的撹乱項を支配する確率微分方程式を定式化するに当たって、幾つかの考え方が存在する．代表的には、幾何ブラウン運動、平均回帰確率過程、幾何ブラウン・ポアッソン過程で表現されている． 幾何ブラウン運動は

$$dX(t) = \mu_X(X(t))dt + \sigma_X(X(t))dz, \tag{42}$$

[27] Abel(1983), Abel and Eberly(1994), and Caballero and Pindyck(1996) では、$\nu = 1$ が仮定されている．Abel and Eberly(1996,199) のモデルでは、$\nu < 1$ および π の一時同次性が仮定されている．Caballero(1991) は $\nu > 1$ を仮定している．

と表現される．ここで、z は標準ブラウン運動である．このケースでは、X はドリフトの大きさと分散係数が

$$\mu_X(X) = \mu X,\ \sigma_X(X) = \sigma_X X.$$

で与えられる．平均回帰確率過程による表現では、

$$dX(t) = \iota(\mu_X - X(t))dt + \sigma_X X(t)dz(t), \tag{43}$$

となる．ここで、ι は平均への回帰のスピード、μ_X は長期的需要水準、 σ_X はボラティリティーを表わす．幾何ブラウン・ポアッソン過程で表現されるケースでは、

$$dX = (\mu_X - \tilde{\lambda}k)X(t)dt + \sigma_X X(t)dz(t) + kX(t)dN(t), \tag{44}$$

となる．N はポアッソン過程、 $\tilde{\lambda}$ はポアッソン過程の到着率、 k はジャンプの大きさを表現する．

資本ストックは

$$dK(t) = (I(t) - \delta K(t))dt, \tag{45}$$

に従って増加する．ここで、 $I(t)$ は時刻 t での投資量、 δ は減価償却率である．資本ストックを増加するときの直接的費用は資本財の購入費用である．資本ストックの変更には調整費用がかかる．投資の総費用は調整費用を含めて、$c(I,K)$ と表記する． 投資の総費用 $c(I,K)$ は I に関して厳密に凸、原点 $I=0$ を除いて連続であると仮定する．原点で、右側微係数が左側微係数よりも大きいケースを認める．即ち、

$$\lim_{h\to 0} c_I(0+h,K) \geq \lim_{h\to 0} c_I(0-h,K), \quad h>0$$

と仮定する．企業は将来利潤の期待現在価値を最大化する．企業の現在価値 V は

$$V(K(s),X(s)) = \max_I E_s[\int_0^\infty \{\pi(K(t+s),X(t+s)) - c(I(t+s),K(t+s))\}e^{-\mu t}dt] \tag{46}$$

と定義される．ここで、E_s は時刻 s での期待値をとるオペレータ、μ は投資家が要求する割引率である．動的計画法を用いて、現在価値 V が満たすべき条件式

$$\mu V(K,X) = \max_I \{\pi(K,X) - c(I,K) + \frac{1}{dt}E_s dV\} \tag{47}$$

を導出することができる．左辺は投資化が要求する収益率、右辺は投資から得られる収益率の最大値となっている．投資から得られる収益率は粗利潤 $\pi(K,X) - c(I,K)$ とキャピタル・ゲイン EdV/dt からなる．外的撹乱が幾何ブラウン運動に支配される場合だけを考える．この場合、伊藤のレンマを適用して、

$$V_s + \max_I[\mathcal{A}(s)V + \pi(K,X) - c(I,K)] = \mu V(K,X),$$

を得ることができる．ただし、

$$\mathcal{A}(s)V = (I - \delta K)V_K + \mu_X(X)V_X + \frac{1}{2}\sigma_X(X)^2 V_{XX}.$$

である．$V_s = 0$ であるから、

$$\max[\pi(K,X) - c(I,K) + (I-\delta K)V_K + \mu_X(X)V_X + \frac{1}{2}\sigma_X(X)^2 V_{XX}] = \mu V(K,X), \tag{48}$$

が成立つ．$q = V_K$ と定義すると、q は資本の限界価値 q と理解される．最適投資 I^* は関数

$$\psi(I; K, X) \equiv IV_K - c(I, K)$$

を最大化する I である．従って、最適投資は $q(= V_K)$ と K の関数となる．これを $I^* = I^*(q, K)$ と表現する．投資の総費用関数が微分可能であるならば、最適投資の第一階の条件は $c_I(I^*, K) = q$ である．しかし、投資の総費用関数は原点で微分可能ではないので、資本の限界価値 q が区間 $[c_I(0, K)^-, c_I(0, K)^+]$ の内部に位置する限り、最適投資はゼロとなる．このことを要約的に表現すると、

$$\begin{aligned}
&c_I(I^*, K) = q, && \text{when } q > c_I(0, K)^+,\\
&I^* = 0, && \text{when } c_I(0, K)^+ \geq q \geq c_I(0, K)^-,\\
&c_I(I^*, K) = q, && \text{when } c_I(0, K)^- > q
\end{aligned}$$

となる．$q > c_I(0, K)^+$ が成立つ範囲では、最適投資は正の値ととるが、$q < c_I(0, K)^-$ が成立する範囲では、最適投資は負となり、資本財を構成する既存設備や機械などが売却されることとなる．こうして、投資の総費用用関数が原点で屈折している限り、最適投資政策は Ss タイプのトリガー政策となる．$q^u = c_I(0, K)^+$ が正の投資が開始されるときの、限界価値の閾値であり、$q^l = c_I(0, K)^-$ が投資財を売却し始めるときの閾値となる．投資の総費用関数が厳密に凸関数となっていると想定できる限り、最適投資は限界価値 q の増加関数となっている．

資本の限界価値 q の経済的な意味を調べるために、(48) 式を K に関して微分すると、

$$\pi_K(K, X) - c_K(I^*, K) - \delta q + q_K(I^* - \delta K) + \mu_X(X)q_X + \frac{1}{2}\sigma_X(X)^2 q_{XX} = \mu q. \tag{49}$$

が得られる．(49) は

$$\mathcal{A}(t)q + \pi_K(K, X) - c_K(I^*, K) - (\mu + \delta)q = 0. \tag{50}$$

とコンパクトな形式で表現できる．ファインマン - カッツの定理を適用すると、投資の限界価値 q は

$$q(t, K, X) = E_t[\int_0^\infty \{\pi_K(K(t+s), X(t+s)) - c_K(I(t+s), K(t+s))\}e^{-(\mu+\delta)s}ds] \tag{51}$$

と表現されることが分かる．ここで、境界条件 $\lim_{T\to\infty} q(T, K, X)e^{-(\mu+\delta)T} = 0$ を仮定した．この表現によれば、資本の限界価値 q は投資から将来得られるであろう総限界収入の期待値の現在価値に他ならない．

投資の総費用関数として以下のものを仮定する．

$$c(I, K) = \begin{cases} a_1K + b_1I + \eta_1 I^{\gamma_1}K^{\gamma_2}, & \text{when } I > 0\\ 0, & \text{when } I = 0, \quad \text{(the gross cost function of investment)}\\ a_2K + b_2I + \eta_2|I|^{\gamma_1}K^{\gamma_2}, & \text{when } I < 0 \end{cases} .$$

ただし、$a_1, a_2 > 0$, $b_1 > b_2 > 0, \eta_1, \eta_2 \geq 0$ を仮定する．この関数形は投資理論の文献で採用されてきた関数形、例えば、Abel and Eberly(1994) を一般化した形式を持っている．この関数形そのままで解析的な表現を求めて、分析をすることは非常に困難である．ここでは、特殊ケースである、$a_1 = a_2 = \gamma_2 = 0$ の場合に分析を進める．この場合、投資の総費用関数は

$$c(I, K) = c(I) = \begin{cases} b_1I + \eta_1 I^{\gamma_1}, & \text{when } I > 0\\ 0, & \text{when } I = 0,\\ b_2I + \eta_2|I|^{\gamma_1}, & \text{when } I < 0 \end{cases}$$

となる．b_1 は資本財の購入価格、b_2 は資本財の売却価格を意味する．資本の限界価値が売却価格と購入価格の間に位置する場合、投資額はゼロとなる．最適投資政策は

$$\begin{aligned}
(I^*)^{\gamma_1-1} &= (q-b_1)/(\eta_1\gamma_1) > 0, && \text{when } q > b_1,\\
I^* &= 0, && \text{when } b_1 \geq q \geq b_2,\\
(-I^*)^{\gamma_1-1} &= -(q-b_2)/(\eta_2\gamma_1) > 0, && \text{when } b_2 > q
\end{aligned}$$

と表現できる．

$\beta = 1$ のケースは、Abel and Eberly(1994) と同じモデルとなるので、結論も同じとなる．ここでは、$\beta < 1$ のケースを考察する[28]．資本の限界価値 q の挙動は (49) 式に支配される．$b_2 < q < b_1$ のとき、投資はゼロなので、

$$\beta h X^{\nu} K^{\beta-1} - \delta q - q_K \delta K + \mu_X X q_X + \frac{1}{2}\sigma_X^2 X^2 q_{XX} = \mu q$$

が成立する．この偏微分方程式の解は

$$q(K,X) = AX^{\nu}K^{\beta-1} + B(X),$$

と仮定できる．第 1 項が特殊解、第 2 項は斉次解となっている．斉次解 B を $B(X) = BX^{\theta}$ とおくと、θ が以下の特性方程式を満たさなければならなことが分かる．

$$\frac{1}{2}\sigma_X^2\theta(\theta-1) + \mu_X\theta - (\delta+\mu) = 0. \tag{52}$$

この特性方程式は異なる 2 つの解 θ_1, θ_2 を持ち、$\theta_1 > 1, \theta_2 < 0$ である．かく乱項がゼロとなるとき、値が有限であるためには、X^{θ_2} の項は存在し得ない．よって、

$$B(X) = BX^{\theta_1}.$$

特殊解を元の偏微分法廷式に代入すると、A が

$$A = \frac{\beta h}{\mu + \beta\delta - \nu\mu_X - \frac{1}{2}\nu(\nu-1)\sigma_X^2}.$$

と定まる．資本の限界価値が b_1 に到達するとき、正の投資が起こり、資本の限界価値が b_2 に到達するとき、負の投資が起こる．$q = b_1, q = b_2$ における境界条件 (連続性、平滑接続の条件) を用いると、正の投資が発動される閾値 X_1 および負の投資が発動される閾値 X_2 を求めることができる．例えば、正の投資が発動される閾値 X_1 は具体的に

$$X_1 = [\frac{b_1}{1-\nu/\theta_1}\frac{\mu + \beta\delta - \nu\mu_X - \nu(\nu-1)\sigma_X^2/2}{\beta h}K^{1-\beta}]^{1/\nu},$$

と求まる．閾値 X_1 の大きさは、b_1, θ_1, ν, K に依存している．利潤関数が撹乱項 X の凹関数であるとき、つまり $\nu < 1$ のとき、閾値 X_1 の大きさは資本財の購入価格の減少関数となる．資本財の価格の上昇は投資を減少させるように働く．また、資本ストックが拡大するにつれて、他の事情を一定として、投資は減少する．同じように、外的撹乱のボラティリティーの増加は閾値 X_1 を上昇させる．言い換えると、不確実性のボラティリティーが増大するにつれて、投資が引き下げられることも分かる．しかし、$\nu > 1$ のときには、この結論は必ずしも成立しない．一般的には、不確実性のボラティリティーの増大が投資を引き下げるように働くか否かはパラメターの大きさに依存しており、不確実性のボラティリティーと投資との間に単調な関係が必ずしも成立たない．

[28]詳細な分析は Mashiyama(2009) を参照してください．

8　事例4：投資費用に不確実性を持つ投資プロジェクト

投資プロジェクトが一括投資として短時間のうちに実現可能であると想定できるような投資プロジェクトの事例では投資費用の不確実性は無視できる．しかし、投資プロジェクトが長期に渡って維持される場合、投資費用に関する不確実性が重要であり、投資プロジェクトの途中段階において、プロジェクトを放棄するような政策が望ましいことも起こりうる．ここでは、そうした事例を取り上げる．事例2で取り上げた投資タイミングの事例では、投資費用が初期時点では不確実性を伴っているとしても、投資プロジェクトは短期的にあるいは瞬時的に実行可能であると想定されていた．もし投資プロジェクトが長期にわたって続行されなければならない場合、どれほどの総投資額が実際に必要とされるかという不確実性問題だけのみならず、将来のどの時点で投資プロジェクトが完了できるのかという不確実性の問題も発生する．時刻 t において、投資プロジェクトが完了するまでに必要と予想される必要資額を K で表現する．言い換えると、$K(T)=0$ となるような時刻 T で投資プロジェクトは完了する．時刻 t で予想される必要投資額 $K(t)$ は確率微分方程式

$$dK(t) = -I(t)dt + \sigma_K K(t)dz_K + \sigma_w \sqrt{I(t)K(t)}dw \tag{53}$$

に従うと仮定する[29]．ここで、$I(t)$ は時刻 t での投資額、dz_K は投資費用の中で要素価格等の変動に起因する不確実性を表現する標準ウイーナー過程の増分、dw は投資費用の技術的不確実性などを表現する標準ウイーナー過程の増分である．完成までに必要とされる投資額は実際に投資された額が増加すれば、減少する．上式の右辺第1項はこの事実を表現する．第2項は経済環境の変動に起因するリスクを表現し、このリスクは金融資産のリスクとある種の相関関係を持つと想定できる．第3項は、技術的なリスクを表現しているので、金融資産市場におけるリスクとは相関を持たない．このリスクは完全に分散化可能なので、このリスクに対するリスク・プレミアムはゼロである．投資プロジェクトが完了した後に生み出されるキャッシュフローの価値 (投資プロジェクトの価値）V は

$$dV(t) = \alpha_V V(t)dt + \sigma_V V(t)dz_V \tag{54}$$

に従うと仮定する．dz_V は標準ウイーナー過程の増分である．dz_V と dz_K は相関係数 ρ_{VK} を持つ．簡単化のために、瞬時的投資額 $I(t)$ は上限が k に定められていると仮定する．つまり、$k \geq I \geq 0$ とする．$F(V,K)$ を投資オプションの価値とする．投資オプションの価値は

$$F(V,K) = \max_I E_0[Ve^{-\mu T} - \int_0^T I(t)e^{-\mu t}dt] \tag{55}$$

と定義される．このときの、最大化の制約条件は、必要投資額 K のダイナミックスを支配する確率微分方程式 (53) と投資からの収益 V のダイナミックスを支配する確率微分方程式 (54) である．投資プロジェクトの完成時刻 T は $K(T)=0$ を満たす確率変数である．ハミルトン - ヤコビ - ベルマンの方程式は

$$\begin{aligned} F_t \quad + \quad & \max_{I(t)}[-I(t) + F_V \alpha_V V - F_K I(t)\alpha_V V \\ & + \frac{1}{2}F_{VV}\sigma_V^2 V^2 + \frac{1}{2}F_{KK}\sigma_K^2 K^2 + F_{VK}VK\sigma_{VK} + \frac{1}{2}F_{KK}\sigma_w^2 I(t)K] = \mu F \end{aligned}$$

となる．係数がすべて時間に依存しないので、$F_t = 0$ が成り立つ．

ここで、コンビニエンス・イールドを明示的にモデルに取り込むならば、このハミルトン - ヤコビ - ベルマンの方程式は以下のように修正されなければならない．ポートフォリオ複製の手法を用いることにする．

[29] この定式化は、Pindyck(1993) が提案した投資費用に関する不確実性を表現するモデルであり、その後、多くの研究者によって活用されてきた．

この手法が実現可能となるために、必要投資額 K と同一のリスクに支配される資産が存在し、その価格 X が

$$\frac{dX}{X} = \alpha_X dt + \sigma_X dz_K$$

に従うと仮定する．投資プロジェクトを 1 単位、n_1 単位の生産物のショート・ポジション、n_2 単位の資産 X のショート・ポジションから構成されるポートフォリオ Y を考える．$Y = F - n_1 V - n_2 X$.

$$\begin{aligned}
dY &= dF - n_1 dV - n_2 dX \\
&= F_t dt + F_V dV + F_K dK \\
&\quad + [\frac{1}{2}F_{VV}\sigma_V^2 V^2 + \frac{1}{2}F_{KK}\sigma_K^2 K^2 + F_{VK}VK\sigma_{VK} + \frac{1}{2}F_{KK}\sigma_w^2 I(t)K]dt - n_1 dV - n_2 dX
\end{aligned}$$

このポートフォリオを保有することに伴って、投資支出＋コンビニエンス・イールド

$$I(t)dt + \delta_1 n_1 V dt + \delta_2 n_2 X dt$$

の支出が必要とされるので、期間 $(t, t+dt)$ におけるポートフォリオ Y の収益率は

$$\begin{aligned}
F_t dt &+ F_V \alpha_V V dt - F_K I dt \\
&+ (F_V - n_1)\sigma_V V dz_V + (F_K K \sigma_K - n_2 X \sigma_X) dz_K + F_K \sigma_w \sqrt{I(t)K(t)} dw \\
&+ [\frac{1}{2}F_{VV}\sigma_V^2 V^2 + \frac{1}{2}F_{KK}\sigma_K^2 K^2 + F_{VK}VK\sigma_{VK} + \frac{1}{2}F_{KK}\sigma_w^2 I(t)K]dt \\
&- [n_1 \alpha_V V + n_2 \alpha_X X + I + \delta_1 n_1 V + \delta_2 n_2 X]dt
\end{aligned}$$

となる．ここで、$n_1 = F_V$, $F_K K \sigma_K = n_2 X \sigma_X$ とおくと、dz_V, dz_K の項が消去される．このとき、ポートフォリオの期待収益率はリスクフリー利子率と一致する必要がある[30]．よって、

$$\begin{aligned}
F_t + F_V \alpha_V V - F_K I + \frac{1}{2}F_{VV}\sigma_V^2 V^2 + \frac{1}{2}F_{KK}\sigma_K^2 K^2 + F_{VK}VK\sigma_{VK} + \frac{1}{2}F_{KK}\sigma_w^2 I(t)K \\
-\alpha_V F_V V - \tilde{\alpha}_K F_K K - I - \delta_1 F_V V - \delta_2 F_K K = r(F - F_V V - F_K K)
\end{aligned}$$

が成立する．ただし、$\tilde{\alpha}_K = \alpha_X \sigma_K / \sigma_X$ とおいた．コンビニエンス・イールドは

$$\delta_1 = r + \lambda \sigma_V \rho_{VM} - \alpha_V,\ \delta_2 = r + \lambda \sigma_X \rho_{XM} - \alpha_X$$

と与えられている．こうして、コンビニエンス・イールドを明示的にモデルに取り込むならば、ハミルトン - ヤコビ - ベルマンの方程式は、

$$\begin{aligned}
\max_{I(t)}[-I(t) - F_K I(t) &+ F_V(r - \delta_1)V + F_K(r - \delta_2 - \tilde{\alpha}_K)K \\
&+ \frac{1}{2}F_{VV}\sigma_V^2 V^2 + \frac{1}{2}F_{KK}\sigma_K^2 K^2 + F_{VK}VK\sigma_{VK} + \frac{1}{2}F_{KK}\sigma_w^2 I(t)K] = rF
\end{aligned}$$

と修正されなければならない．このハミルトン - ヤコビ - ベルマン方程式は投資 I の線形関数なので、最適な投資政策は

$$I(t) = \begin{cases} k, & \frac{1}{2}F_{KK}\sigma_w^2 K - F_K - 1 \geq 0 \text{ の場合} \\ 0, & \text{その他の場合} \end{cases}$$

[30]技術的不確実性 dw に関するリスクは分散化可能なので、期待収益率に何の影響も与えない．

となる．$\frac{1}{2}F_{KK}\sigma_w^2 K - F_K - 1 = 0$ で与えられる $K^*(V)$ が投資のトリガー水準で、$K < K^*(V)$ になるとき、投資を続行する．ハミルトン - ヤコビ - ベルマン方程式は、$K = K^*(V)$ を境界として、$K > K^*(V)$ の場合,

$$F_V(r-\delta_1)V + F_K(r-\delta_2-\tilde{\alpha}_K)K + \frac{1}{2}F_{VV}\sigma_V^2 V^2 + \frac{1}{2}F_{KK}\sigma_K^2 K^2 + F_{VK}VK\sigma_{VK} = rF,$$

$K < K^*(V)$ の場合

$$\begin{aligned} -k - kF_K &+ F_V(r-\delta_1)V + F_K(r-\delta_2-\tilde{\alpha}_K)K \\ &+ \frac{1}{2}F_{VV}\sigma_V^2 V^2 + \frac{1}{2}F_{KK}\sigma_K^2 K^2 + F_{VK}VK\sigma_{VK} + \frac{1}{2}F_{KK}\sigma_w^2 kK = rF \end{aligned}$$

と分離できる．投資プロジェクトが完成したとき、工場から生産が開始されるので、投資プロジェクトの価値は工場の価値 V に転化する．投資総額が無限大になるにつれて、投資プロジェクトの価値はゼロになる．また、工場からの収益がゼロに近づくにつれて、投資の価値はゼロとなる．これらをまとめると、境界条件は、

$$\begin{aligned} F(V,0) &= V, \\ \lim_{K\to\infty} F(V,K) &= 0, \\ \lim_{V\to 0} F(V,K) &= 0, \end{aligned}$$

$$\frac{1}{2}F_{KK}(V,K^*)\sigma_w^2 K^* - F_K(V,K^*) - 1 = 0$$

で与えられる． さらに、$F(V,K)$, $F_K(V,K)$ は $K^*(V)$ で連続であるという条件が満たされる必要がある．

こうして定式化されたハミルトン - ヤコビ方程式を解析的に解くことは困難である．幾つかの特殊ケースに対しては、解析的な解を求めることができるが、一般的には数値計算が必要である．Pindyck(1993) は収益 V に不確実性が存在しないケース、つまり、$\alpha_V = 0$, $\sigma_V = 0$ のケースに対して、数値計算を用いて、F の具体的な関数形を描いている．

9　事例５：R＆D 投資プロジェクト

この節では、企業の研究開発投資に関わる意思決定問題をリアル・オプションズ・モデルとして定式化して、分析することを取り上げる[31]．新しい製品を開発して、それを新規市場に投入しようとしている企業を考える．研究開発への投資によって新製品が開発できたとき、企業はその製品の生産に関わる特許を申請し、獲得する．認可された特許のもとで、代替的な特許が申請されるまでの期間では、企業は独占的な利益を入手できるとする．特許を取得することによりもたらされるキャッシュフロー (利益)π は幾何ブラウン運動

$$\frac{d\pi}{\pi} = \mu_X dt + \beta\sigma_m dz_m + \sigma_I dz_I,$$

に従うとする．ここで、z_m は標準ウィーナー過程で市場リスクを代表する．z_I は市場リスクとは独立な個別的リスクを表現する標準ウィーナー過程である． μ_X はキャッシュフローの期待成長率であり、β は CAPM ベータ値、σ_M は市場リスクのボラティリティー、σ_I は個別リスクのボラティリティーである．総リスクを w で表記すると、

$$dw = \frac{\beta\sigma_m}{\sigma}dz_m + \frac{\sigma_I}{\sigma}dz_I,\ \sigma = \sqrt{\beta^2\sigma_m^2 + \sigma_I^2},$$

[31] R&D 投資行動を取り扱った伝統的な研究文献は、Loury(1979)、Lee and Wilde(1980)、Reinganum(1983)、Dasgupta and Stiglitz(1986)、Dixit(1986) などに代表される．

と定義できて、キャッシュフローの挙動を支配する確率微分方程式は

$$\frac{d\pi}{\pi} = \mu_X dt + \sigma dw. \tag{56}$$

となる．時刻 t でのパテントの現在価値 $V(t)$ は

$$V(t) = E_t[\int_t^T e^{-\mu(\tau-t)}\pi(\tau)d\tau],$$

で与えられる．ここで、μ は投資家が要求するリスク調整済みの割引率で、CAPM によれば、$\mu = r + \beta\lambda_m$ を満たしている．λ_m はリスクの市場価格である．新製品市場に新規参入者が現れなければ、$T = \infty$ となる．よって、$t = T$ での境界条件が

$$V(T) = \begin{cases} 0, & \text{市場が完全競争市場となるとき,} \\ a\pi(T), & \text{独占が維持されるあるいは寡占になるとき,} \end{cases}$$

となる．ここで、$a > 0$ は市場が独占になるか、あるいは寡占となるかに依存して決まる定数である．時刻 T 以降に市場が完全競争市場となるとき、パテントの現在価値 $V(t)$ は

$$V(t) = \frac{\pi(t)}{\mu - \mu_X}[1 - e^{-(\mu-\mu_X)(T-t)}],$$

と表現される．新規参入者が現れず、独占状態が永続するときは、パテントの現在価値 $V(t)$ は

$$V(t) = \frac{\pi(t)}{\mu - \mu_X},$$

となる．

R&D 投資プロジェクトは通常成功するまで長い時間を要し、その間に学習効果が働いている．R&D 投資が成功するか否かの技術的な不確実性のみならず、プロジェクトが成功するまでにどれほどの費用が必要とされるかの不確実性も存在する．このような R&D 投資に関わる不確実性を明示的に定式化する方法は、R&D 投資の文献では、大まかに二種類に分類できる．第 1 は、飛躍型マルコフ過程を採用する方法であり、他の方法は連続型拡散過程を適用することである．R&D 投資の標準的なモデルでは、R&D 投資に関わる不確実性は R&D 投資の大きさに依存するハザード率 (到着率) で特徴付けられるポアッソン過程によってモデル化されている．最も簡単なモデルは以下のように定式化される．新製品開発を目指す企業が固定的初期費用 C_F を投入して R&D プロジェクトを開始し、プロジェクトの期間中フローの投資額 I を投入し続けると、開発の成功は一定のハザード率 λ のポアッソン過程に従う．このハザード率は投資の累積額 K に依存すると同時に、R&D 期間を通して支出されるフローの投資額 I にも依存する．ハザード率 λ は投資の累積額 K の増加関数、フローの投資額 I の増加関数であるとする[32] 、$\lambda(t) = \lambda(K(t), I(t))$．投資の累積額 $K(t)$ は

$$K(t) = C_F + \int_{T_1}^t I(\tau)d\tau,$$

と定義できる．R&D プロジェクトの現在価値は

$$E_0[e^{-\mu T_1}\{\int_{T_1}^\infty (V(t)\lambda(K,I) - I(t))e^{-\lambda(K,I)(t-T_1)}e^{-\mu(t-T_1)}dt - C_F\}],$$

[32]ちなみに、Loury(1979)、Dasgupta and Stiglitx(1980)、Dixit(1986) のモデルでは、$I = 0$ と仮定され、$\lambda = \lambda(C_F)$ と仮定されている．Lee and Wilde(1980) と Reinganum(1983) のモデルでは、$\lambda = \lambda(I)$ と仮定されている．

と定義される．ここで、T_1 は．R&D プロジェクトを実施に移す時点を表わす．時刻 t で新製品の開発に成功すれば、パテントが入手できる．時刻 t 以前までには R&D が成功せず、期間 $(t, t+dt)$ 内で成功する確率は $\lambda(K,I)\exp\{-\lambda(K,I)t\}$ である．時刻 t まで成功しない確率は $\exp\{-\lambda(K,I)t\}$ である．企業は成功するまで投資額 I を支出し続ける必要がある．

次に、R&D プロジェクトの不確実性を連続型拡散過程を適用してモデル化する代替的方法について考える．R&D プロジェクトは固定的初期費用 C_F を投入し、プロジェクトの期間中フローの投資額 I を投入し続ける必要があると仮定する．R&D に成功するためには、R&D の進歩が R&D の目的が要求する困難度を超える必要があると想定し、この困難度は R&D 投資が進んだ距離によって測る．新製品の開発に成功するために必要な困難度 (R&D の進歩が超えなければならない距離) を $\bar{L}$ とする．R&D が成功する時刻を T_1 とすると、R&D プロジェクトの現在価値は

$$E_0[e^{-\mu T_1}(V(T_2)e^{-\mu(T_2-T_1)} - \int_{T_1}^{T_2} I(\tau)e^{-\mu(\tau-T_1)}d\tau - C_F)],$$

で表現される．目標地点までの距離 $\bar{L}$ と R&D プロジェクトが進んだ距離の差が、成功するために進まなければならない残された距離である．距離 $\bar{L}$ と時刻 t までに R&D プロジェクトが進んだ距離の差を $L(t)$ とすると、成功時刻 T_2 は $L(T_2)=0$ を満たす最小の時刻と定義される．初期条件として、$L(0)=\bar{L}$ を想定する．成功までに進むべき距離 $L(t)$ は確率微分方程式

$$dL = -f(I)dt + \sigma_l\sqrt{IL}dz_l - \nu dN(t),$$

に従うと仮定する[33]．ここで、N はハザード率 λ のポアッソン過程、ν はポアッソン過程の飛躍の大きさ、z_l は費用の不確実性を表現する標準ウィーナー過程である．$f(I)$ と λ は R&D のフロー投資額 I の増加関数で、凹関数であるとする．$f(I)$ の最も簡単な関数形は $f(I)=I$ である．

最後に、リアル・オプションズ・モデルで頻繁に採用されている第 3 の代替的定式化を考えよう[34]．R&D が成功するために実際に必要とされる総費用は確率変数で、$\tilde{K}$ と表現する．確率変数 $\tilde{K}$ の期待値は $K=E[\tilde{K}]$ である．R&D が成功するためには時刻 t で $K(t)$ の額の投資が (平均的に) 必要とされる．新製品の開発に成功する時刻 T_2 は、成功に必要な総費用がゼロとなる時点、つまり $K(T_2)=0$ を満たす時刻となる．初期条件として、$K(0)=\bar{K}$ を想定する．新製品の開発に成功するために要求される予想費用 $K(t)$ は確率微分方程式

$$dK = -Idt + \sigma_k\sqrt{IK}dz_k + \lambda_k\sigma_m dz_m,$$

に従うと仮定する．ここで、σ_m は市場リスクを表現する標準ウィーナー過程、σ_k は市場リスクと独立なリスクを表現する標準ウィーナー過程とする．この式の右辺の第 2 項は R$D 技術の不確実性から発生する費用のリスクを表現している．第 3 項は要素価格などの市場変数の不確実性から生まれるリスクを表現する．

分析を簡単化するために、最も単純なケースを取り扱うことにする[35]．パテントを取得後、新規参入企業は現れず、独占的地位が永続するケースを考える．さらに、R&D 技術の不確実性は一定なハザード率を持つポアッソン過程によって定式化できるとする．このとき、パテントの現在価値は $V(t)=\pi(t)/(\mu-\mu_X)$ で表現されるので、パテントの現在価値 $V(t)$ は確率微分方程式

$$\frac{dV}{V} = \mu_X dt + \sigma_X dw$$

[33] この定式化は Grossman and Shapiro(1986) のモデルを一般化した形式となっている．

[34] このモデルは最初に Pyndick(1993) によって提案され、後に、R&D 投資の分析において、Meng(2008)、Miltersen and Schwartz(2004) および Schwartz(2004) などにより適用されている．

[35] 上で定式化したすべてのケースに対する分析は未だ完成していない．幾つかの複雑なケースに対する分析については、例えば、Miltersen and Schwartz(2004) や Schwartz(2004) などを参照してください．

に従う．企業は R&D を開始するに当たって、初期固定投資額 C_F を投入し、プロジェクトを維持している期間中にフロー投資額 x を支出するとする．フロー投資額 x は時間に依存せず、一定であると想定しよう．新製品開発が成功するハザード率 λ はフロー投資額 x の増加関数で、凹関数とする．R&D プロジェクトの現在価値 W は

$$\begin{aligned} W(V(0)) &= \max_x E_0[e^{-\mu T_1}\{\int_{T_1}^{\infty} V(t)\lambda(x)e^{-\lambda(x)(t-T_1)}e^{-\mu(t-T_1)}dt - \frac{x}{\mu+\lambda(x)} - C_F\}] \\ &= \max_x E_0[e^{-\mu T_1}(\frac{\lambda(x)V(T_1)}{\lambda(x)+\mu-\mu_X} - \frac{x}{\mu+\lambda(x)} - C_F)]. \end{aligned} \tag{57}$$

で定義される． 右辺の第 1 項 $\lambda(x)V(T_1)/(\lambda(x)+\mu-\mu_X)$ はプロジェクトが成功した時点でのパテントの割引現在価値であり、第 2 項 $x/(\mu+\lambda(x))+C_F$ は総投資費用の割引現在価値に他ならない．R&D プロジェクト実施中の最適投資政策は

$$\frac{V(T_1)(\mu-\mu_X)\lambda'(x^*)}{(\lambda(x^*)+\mu-\mu_X)^2} = \frac{\lambda(x^*)+\mu-x^*\lambda'(x^*)}{(\lambda(x^*)+\mu)^2} \tag{58}$$

を満たさなければならない．R&D が成功する予想時刻 T_2 は $E_0[T_2-T_1]=1/\lambda(x^*)$ により決まる．

R&D プロジェクトが開始されるまでの時刻では $(t<T_1)$、R&D プロジェクトの現在価値 W は偏微分方程式

$$\frac{1}{2}\sigma_X^2 V^2 W'' + \mu_X V W' - \mu W = 0, \tag{59}$$

に従って変動する．境界条件は以下の 2 条件となる．$t=T_1$ における連続性の条件から

$$W(V^*) = \frac{\lambda(x^*)V^*}{\lambda(x^*)+\mu-\mu_X} - \frac{x^*}{\mu+\lambda(x^*)} - C_F.$$

平滑接続の条件から

$$W_V(V^*) = \frac{\lambda(x^*)}{\lambda(x^*)+\mu-\mu_X}.$$

偏微分方程式 (59) の一般解は

$$W(V) = BV^{\beta_1},$$

とおくことができる．ただし、B は未定係数で、β_1 は特性方程式

$$g(\beta) = \frac{1}{2}\sigma^2\beta(\beta-1) + \mu\beta - \rho = 0$$

の解のなかで 1 よりも大きい解である $(\beta_1>1)$．2 つの境界条件を用いると、実施時刻を定める閾値 V^* と未定係数 B の具体的な表現

$$\begin{aligned} V^* &= \frac{\beta_1}{\beta_1-1}(\frac{\lambda(x^*)+\mu-\mu_X}{\lambda(x^*)})(\frac{x^*}{\lambda(x^*)+\mu}+C_F), \qquad (60) \\ B &= \frac{1}{\beta_1}(\frac{\lambda(x^*)}{\lambda(x^*)+\mu-\mu_X} - \frac{x^*}{\mu+\lambda(x^*)} - C_F)(V^*)^{-\beta_1} \qquad (61) \end{aligned}$$

が得られる．式 (60) を変形すると、不等式 $\beta_1/(\beta_1-1)>1$ から

$$\frac{\lambda(x^*)}{\lambda(x^*)+\mu-\mu_X}V(T_1) = \frac{\beta_1}{\beta_1-1}(\frac{x^*}{\lambda(x^*)+\mu}+C_F) > \frac{x^*}{\lambda(x^*)+\mu}+C_F$$

なる関係式が成立する．この関係式は、企業が R&D プロジェクトの将来収益に関わる不確実性を考慮するならば、マーシャル的な損益計算に依拠する場合に比べて、R&D プロジェクトの実施時期が先送りされること、言い換えると、R&D プロジェクトの実施により慎重になることを含意する．

10　事例６：２段階複合リアル・オプションズ

事例 2 での投資プロジェクトの実施時期の決定問題のモデルでは、投資プロジェクトが生み出すキャッシュフローの現在価値計算の中には、操業停止オプションの価値および生産からの撤退オプションの価値は含まれていなかった．投資プロジェクトが実際に実行された後に、操業を停止したり、あるいは生産から撤退して設備を売却するオプションを取ることは可能である．このような場合、投資オプションの価値は操業停止オプションの価値および生産からの撤退オプションの価値にも依存する．このように、ほとんどの投資オプションは複合オプションとしての構造をもつことになる[36]．ここで、このような複合オプションを考慮したオプション価格の確率計算の事例を鉱山開発投資プロジェクトの評価問題から取り上げる．開発対象となっている鉱山から産出される鉱物商品 (例えば、銅や石炭、原油) の直物価格 P は以下の幾何ブラウン運動

$$\frac{dP}{P} = \alpha_P dt + \sigma_P dz_P$$

に従う．dz_P は商品価格のリスクを支配する標準ウイーナー過程の増分である．鉱物商品を在庫として保有することはコンビニエンス・イールド C を生む．このコンビニエンス・イールドは商品の直物価格の関数 $C(P,t)$ であると仮定する．簡単化のために、$C(P) = \delta P$ とする．この商品の先物価格、時刻 T で受け渡される商品の時刻 t における価格を $F(P,\tau)$, $\tau = T - t$ とする．伊藤の公式を適用すると、

$$dF = (-F_\tau + \frac{1}{2}F_{PP}\sigma_P^2 P^2)dt + F_P dP \tag{62}$$

となる．商品を１単位購入し、$1/F_P$ 単位の先物契約をショート・ポジションで保有する投資家は時間 $(t, t+dt)$ の間に収益率

$$\frac{dP}{P} + \frac{\delta P dt}{P} - \frac{dF}{PF_P} = (PF_P)^{-1}[F_P\delta P - \frac{1}{2}F_{PP}\sigma_P^2 P^2 + F_\tau]dt$$

を得ることができる．左辺の第２項は商品を保有することから得られるコンビニエンス・イールドの大きさを表す．このポートフォリオにはリスクがないので、収益率はリスクフリー利子率 r に等しい．このことから、偏微分方程式

$$\frac{1}{2}F_{PP}\sigma_P^2 P^2 + F_P(r-\delta)P - F_\tau = 0$$

が成立する．境界条件は先物価格は満期時点で直物価格に一致する条件

$$F(P,0) = P$$

である．この式を式 (62) に代入すると、先物価格が満たすべき確率微分方程式

$$dF = F_P(\alpha_P - r + \delta)Pdt + F_P\sigma_P P dz_P \tag{63}$$

が得られる．

鉱山を操業しているときには、生産量 q は区間 $[\bar{d}, \underline{d}]$ の間の値を取りうるとする．操業停止しているときの生産量はゼロである．操業中の鉱山を操業停止する際には、操業を停止するための調整費用 K_1 が発生するとともに、生産を再開する際にも生産再開のための費用 K_2 がかかる．このことから、鉱山の価値 V は、

[36]金融資産を対象とする複合オプションの評価方法に関しては、Carr(1988)、Geske(1979) および Margrave(1978) などの研究でオプション価格の評価公式が与えられている．Trigeorgis(1996) の第 6 章で、２段階複合オプションズの価格付けに対するより一般的な公式が導出されている．

現在操業中であるか、操業停止中であるかに依存する．鉱山の埋蔵量を Q とし、資源の埋蔵量に関する技術的経済的なリスクは存在しないと仮定する．鉱山の価値 V は, 鉱山が産出する鉱物商品の市場価格 P および埋蔵量 Q に依存する．同時に、この価値はどのような操業政策を採用するかにも依存する．鉱山の操業政策を ψ と表記する．生産を行なうオプションを $j=1$、操業を停止するオプションを $j=0$ で表現すると、操業政策 ψ は、各時刻 t において、j の値を定めることと、生産するときの最適な生産量水準 q^* を定めることである．問う k 算プロジェクトの現在価値は $V=V(P,Q,t;j,\psi)$ と表現できる．各時刻 t において j の値を定めることは、操業停止オプションが発動されるときの臨界的な価格水準 $P_1(Q,t)$、操業再開オプションが行使される臨界価格 $P_2(Q,t)$、および閉鎖中の鉱山から撤退するオプションが発動される臨界価格 $P_0(Q,t)$ の値を定めることに他ならない．$\psi\equiv\{q,P_0,P_1,P_2\}$ と表現できる．操業停止と撤退の相違点は、前者の場合には鉱山を維持するための費用が必要とされるが、後者の場合には費用がかからないことにある[37]．時刻 t での鉱山からのキャッシュフローを $\pi(P,Q,t;j,\psi)$ と表記する．Brennan and Schwartz に従って、

$$\pi(P,Q,t;j,\psi)=q(P-A(q))-M(1-j)-\xi_jV-T$$

と定義する．ここで、$A(q)$ は平均生産費用、M は操業中止での維持費用、ξ_j は鉱山に対する比例的資産税 (資産額 V に対する)、T は鉱山のロイヤルティーおよび法人税である．課税額の内訳については後で触れる．鉱山の埋蔵量 Q は生産に伴って

$$dQ=-qdt$$

に従って減少する．この定式化は、埋蔵量に関する不確実性が存在しないことを前提とする．埋蔵量に関する技術的経済的不確実性の問題はここでは無視する[38]．

鉱山の価値 $V(P,Q,t)$ を支配する方程式を導出するために、ここで、鉱山を所有する一方で、V_P/F_P 単位の先物商品契約のショート・ポジションを保有するポートフォリオ $Y=V-(V_P/F_P)F$ を作成する．このポートフォリオの瞬時的収益は、式 (63) を用いると、

$$dV+\pi-\frac{V_P}{F_P}dF=[\frac{1}{2}\sigma_P^2P^2V_{PP}-qV_Q+V_t+q(P-A)-M(1-j)-T-\xi_jV+(r-\delta)PV_P]dt$$

と計算される．この収益には不確実性がない．よって、このポートフォリオの収益はリスクフリー利子率×V に等しい．この条件から、お馴染みの偏微分方程式

$$\frac{1}{2}\sigma_P^2P^2V_{PP}+(r-\delta)PV_P-qV_Q+V_t+q(P-A)-M(1-j)-T=(r+\xi_j)V \tag{64}$$

が導出できる．

$$V(P,Q,t)\equiv\max_{\psi}V(P,Q,t;\ 1,\psi),$$
$$W(P,Q,t)\equiv\max_{\psi}V(P,Q,t;\ 0,\psi)$$

と定義すると、$V(P,Q,t)$ は鉱山が操業中であるときの、時刻 t での鉱山の現在価値、$W(P,Q,t)$ は鉱山が操業停止中であるときの、鉱山の現在価値を表現している．従って、

$$\max_q[\frac{1}{2}\sigma_P^2P^2V_{PP}\quad+\quad(r-\delta)PV_P-qV_Q+V_t+q(P-A)-T]=(r+\xi_1)V, \tag{65}$$

$$\frac{1}{2}\sigma_P^2P^2W_{PP}\quad+\quad(r-\delta)PW_P+V_t-M=(r+\xi_0)W \tag{66}$$

[37] 撤退する場合、鉱山の諸施設を中古市場で売却することもできる．ここでは、売却収益と撤退費用の差額がゼロであると仮定している．

[38] 埋蔵量に関する技術的経済的不確実性を明示的にモデルに導入した事例に関しては、Cortazar, et. al.(2001) を参照してください．

が成立している．境界条件は

$$
\begin{aligned}
W(P_0,Q,t) &= 0,\\
V(P_1,Q,t) &= \max[W(P_1,Q,t)-K_1(Q,t),0],\\
W(P_2,Q,t) &= V(P_2,Q,t)-K_2(Q,t)
\end{aligned}
$$

とならなければならない．価値関数が滑らかに接続する条件を課すと、

$$
\begin{aligned}
W_P(P_0,Q,t) &= 0,\\
V_P(P_1,Q,t) &= W_P(P_1,Q,t),\ W(P_1,Q,t)\geq K_1(Q,t) \text{ のとき；}\\
&= 0,\quad W(P_1,Q,t)<K_1(Q,t) \text{ のとき},\\
W_P(P_2,Q,t) &= V_P(P_2,Q,t)
\end{aligned}
$$

が成立する必要がある．当然ながら、埋蔵量がゼロになったときには、鉱山の価値はゼロなので、

$$V(P,0,t)=W(P,0,t)=0$$

である．平均費用 A、維持費用 M、および操業切り替えにかかる費用 K_1,K_2 が時間に依存する時にのみ、鉱山の価値は時間の関数となる．以下では、インフレなどの価格変動が存在せず、これらの費用は時間に依存しないと仮定する．$V_t=0$ となる．

偏微分方程式 (65) および (66) の解析解を一般的に求めることはできない．ここでは、解析解を求めるために、幾つかの簡単化のための仮定をおく．まず、$Q=\infty$ という極端な仮定をおくことにする．価値関数 V は埋蔵量 Q に依存しないことになる．課税システムに関して、

$$T(q,P)=t_1qP+t_2q\{(1-t_1)P-A\}$$

と仮定する．ここで、t_1 はロイヤルティー支払い率、t_2 は法人税率である．さらに、生産量に関して、操業中の生産量は $q=q^*$ と固定されており、閉鎖中の生産量はゼロとする[39]．この仮定の下で、式 (65) は

$$\frac{1}{2}\sigma_P^2P^2V_{PP}+(r-\delta)PV_P+q^*(1-t_1)(1-t_2)P-q^*A(q^*)(1-t_1)=(r+\xi_1)V \tag{67}$$

と簡単化される．閉鎖中の鉱山の維持費用がゼロであるとする簡単化の仮定 ($M=0$) をおくと、(66) は

$$\frac{1}{2}\sigma_P^2P^2W_{PP}+(r-\delta)PW_P=(r+\xi_0)W \tag{68}$$

に簡単化される．微分方程式 (68) の解が

$$W(P)=B_1P^{\beta_1}+B_2P^{\beta_2}$$

となり、(67) の解が

$$V(P)=B_3P^{\beta_1^*}+B_4P^{\beta_2^*}+\frac{mP}{\xi_1+\delta}-\frac{n}{\xi_1+r}$$

[39]費用関数が生産量の凸関数であれば、最適な生産量が存在する．この場合、解析解を得ることは困難である．Brennan and Schwartz(1985) が示したように、費用関数が２次関数のときには、生産量は２段階で切り換えられる．

になることは容易に分かる．ここで、$m = q^*(1-t_1)(1-t_2)$, $n = q^*A(q^*)(1-t_1)$ とおいた．ただし、

$$
\begin{aligned}
\beta_1 &= \frac{1}{2} - \frac{r-\delta}{\sigma_P^2} + \sqrt{(\frac{1}{2} - \frac{r-\delta}{\sigma_P^2})^2 + \frac{2(r+\xi_0)}{\sigma_P^2}} \\
\beta_2 &= \frac{1}{2} - \frac{r-\delta}{\sigma_P^2} - \sqrt{(\frac{1}{2} - \frac{r-\delta}{\sigma_P^2})^2 + \frac{2(r+\xi_0)}{\sigma_P^2}}, \\
\beta_1^* &= \frac{1}{2} - \frac{r-\delta}{\sigma_P^2} + \sqrt{(\frac{1}{2} - \frac{r-\delta}{\sigma_P^2})^2 + \frac{2(r+\xi_1)}{\sigma_P^2}} \\
\beta_2^* &= \frac{1}{2} - \frac{r-\delta}{\sigma_P^2} - \sqrt{(\frac{1}{2} - \frac{r-\delta}{\sigma_P^2})^2 + \frac{2(r+\xi_1)}{\sigma_P^2}}
\end{aligned}
$$

である．資産税率が $(\xi_0 = \xi_1)$ となっているケースでは、$\beta_1 = \beta_1^*$, $\beta_2 = \beta_2^*$ となる．以下、このケースを仮定しよう．前節まで考察してきた手続きを繰り返せば、$\beta_1 > 1$, $\beta_2 < 0$ および $B_2 = B_3 = 0$ とならなければならないことも分かる．よって、

$$
\begin{aligned}
W(P) &= B_1 P^{\beta_1}, && (69) \\
V(P) &= B_4 P^{\beta_2} + \frac{mP}{\xi+\delta} - \frac{n}{\xi+r}. && (70)
\end{aligned}
$$

係数 B_1, B_4 と、操業切り換えのための臨界価格 P_1, P_2 は先に定式化した境界条件と平滑接続の条件から求めることができる．

投資プロジェクトを評価するためには、投資から得られるキャッシュフローの現在価値の大きさと投資の実行に必要な費用を比較する必要がある．今までの議論から、投資プロジェクトが生み出すキャッシュフローの現在価値の大きさは $V(P,Q,t)$ で与えられることが分かっている．投資に必要な費用を $I(P,Q,t)$ と表現する．鉱山の採掘権を購入するとき、いつ鉱山開発の投資を実行すべきかは、鉱物商品の市場価格の大きさに依存する．未開発鉱山の採掘権の価値を $X(P,Q,t)$ と表現する．

$$
X(P,Q,t) = \max_{t_0} e^{-\mu(t_0-t)} \max[V(P,Q,t_0) - I(P,Q,t_0), 0].
$$

鉱山の価値 $V(P,Q,t)$ を支配する偏微分方程式を導出したのと同じ方法で、投資オプションの価値 $X(P,Q,t)$ が満たすべき偏微分方程式を導出する．鉱山の採掘投資権を所有する一方で、X_P/F_P 単位の先物商品契約のショート・ポジションを保有するポートフォリオ $Y = X - (X_P/F_P)F$ を作成する．このポートフォリオの瞬時的収益は、式 (63) を用いると、

$$
dX - \frac{V_P}{F_P} dF = [\frac{1}{2}\sigma_P^2 P^2 X_{PP} + (r-\delta)PX_P + X_t]dt
$$

と計算される．この収益には不確実性がない．よって、このポートフォリオの収益率はリスクフリー利子率に等しくならなければならない．よって、

$$
\frac{1}{2}\sigma_P^2 P^2 X_{PP} + (r-\delta)PX_P + X_t = rX.
$$

商品価格がゼロになるとき、鉱山の価値はゼロなので、

$$
X(0,Q,t) = 0
$$

であり、採掘権の有効期限が時刻 T に切れるときには、

$$
X(P,Q,T) = 0
$$

となる．投資が実行される市場価格が P^* であるならば、境界条件

$$X(P^*,Q,t) = V(P^*,Q,t) - I(P^*,Q,t)$$

が成立している．価値関数の平滑性から

$$X_P(P^*,Q,t) = V_P(P^*,Q,t) - I_P(P^*,Q,t)$$

も成立する必要がある．ここで、上での簡単化 (パラメターの定常性) の仮定を再び用いると、$X_t = 0$ であり、偏微分方程式は

$$\frac{1}{2}\sigma_P^2 P^2 X_{PP} + (r-\delta)PX_P = rX.$$

という常微分方程式になる．この方程式の解は

$$X(P) = A_1 P^{\tilde{\beta}_1} + A_2 P^{\tilde{\beta}_2}$$

なる形式を持つ． ここで、

$$\tilde{\beta}_1 = \frac{1}{2} - \frac{r-\delta}{\sigma_P^2} + \sqrt{(\frac{1}{2} - \frac{r-\delta}{\sigma_P^2})^2 + \frac{2r}{\sigma_P^2}}; \quad \tilde{\beta}_2 = \frac{1}{2} - \frac{r-\delta}{\sigma_P^2} - \sqrt{(\frac{1}{2} - \frac{r-\delta}{\sigma_P^2})^2 + \frac{2r}{\sigma_P^2}}$$

$X(0) = 0$ だから、$A_2 = 0$ である．鉱山開発の投資額 I が市場価格 P に依存せず、総埋蔵量 Q にも依存しないと仮定するならば、上の一般的な境界条件から、

$$\begin{aligned} A_1(P^*)^{\tilde{\beta}_1} &= B_4(P^*)^{\beta_2} + \frac{mP^*}{\xi+\delta} - \frac{n}{\xi+r} - I, \\ A_1\tilde{\beta}_1(P^*)^{\tilde{\beta}_1-1} &= B_4\beta_2(P^*)^{\beta_2-1} + \frac{m}{\xi+\delta} \end{aligned}$$

がこのケースの具体的な境界条件となる．この境界条件から、係数 A_1 の値、および投資を実行するときの臨界価格 P^* が定まる．係数 A_1 を消去すると、

$$(\tilde{\beta}_1 - \beta_2)B_4(P^*)^{\beta_2} + (\tilde{\beta}_1 - 1)\frac{mP^*}{\xi+\delta} - \tilde{\beta}_1(\frac{n}{\xi+r} + I) = 0$$

なる臨界市場価格を定める関係式を得ることができる．このように決定される P^* が鉱山開発の実行時期を定める閾値となる．鉱物商品の市場価格がこの閾値 P^* を超えた瞬間に投資が実行に移される．この閾値の特徴を分析するためには、上の関係式を P^* に関して解析的に解くことが望ましい．しかし、一般的に P^* の解析解を求めることはできないので、数値解析が必要である．

11 事例６：多段階多重複合リアル・オプションズ

ここでは、異なる種類のリアル・オプションズが何段階にも渡ってシーケンシャルに連続している、より複雑な事例を取り上げる．Paddock, et. al.(1988) や Cortazar, et al(2001) が考察した鉱物資源鉱区の開発事例では、鉱物資源生産のための投資プロジェクトは、大きく分けて３種類の投資プロジェクト、つまり埋蔵量や品質に関わる技術的調査を行なう探索投資、鉱区から資源を掘削するために必要な工場設備等を構築・設置するための建設投資、そして、実際に工場を稼動するための操業投資から構成されている．これらの多数の連続した投資がすべて成功裏に完了して始めて、投資からの収益が生まれる．この事例では、

投資家が直面する不確実性としては、未開発鉱区で予想される資源の埋蔵量に関するリスク、および、生産された資源の市場価格に関するリスクが主として明示的にモデルに導入されている．探索投資は埋蔵量に関わるリスクと開発活動に関わる技術的リスクを消滅するために行なわれる．この探索投資が完了した段階では、埋蔵量と開発費用に関わる地学的・技術的なリスクは死滅し、埋蔵量は確定し、開発費用の積算はリスクなしで確定できると想定されている．それゆえ、探索投資が終了した後に直面するリスクは資源の市場価格リスクだけとなる[40].

Hsu and Scwartz(2003) で分析された製薬企業における R&D 投資の事例では、投資プロジェクトは３段階の意思決定ノードから構成されている．第１段階では、これから行なおうとしている新製品開発のための投資プロジェクトを実行すべきか否かを意思決定する．当然、R&D 活動の実行に必要とされる総費用と新製品の販売から得られる予想収益とを比較して、この新製品開発プロジェクトを開始すべきか否かを意思決定する．R&D 投資は、二つのフェーズから構成されている．第１フェーズでは、新製品開発のための基礎的な R&D 活動が行なわれ、製品化可能かどうかの研究がなされる．第１フェーズが完了すると、パテント獲得のためのの申請が行なわれ、第２フェーズに移行するか否かの意思決定が行なわれる．R&D の第２フェーズでは、新製品の商業生産の可能性、新製品の治験実験、およびパイロット生産の実験が行なわれる．R&D の第２フェーズが完了すると、新製品の生産が商業的に可能と判断された場合、新製品を市場に投入すべきかどうかの意思決定が行なわれれる．新製品の生産・販売計画が実施される場合、工場建設と広告活動の計画、流通・販売経路の確保のための実施計画が実行に移される．工場建設が完了すると、実際の生産が始まり、新製品販売からの収益が得られる．パテントの有効期限が切れるまでの期間では、独占的な収益を獲得できるが、パテントが消えた後は、この製品市場は競争市場となる．

現実の企業経営における意思決定では、複数のリアル・オプションズを管理する資本支出予算の問題が起こる. こうした複数種類のリアル・オプションズを管理するような事態では、各リアル・オプションが互いに相互依存する可能性の故に、企業全体としてのリアル・オプションズの総価値が各リアル・オプションの価値を単純に合計した値には必ずしも一致しない．このことがひいては、コーポレート・ファイナンスにおける企業戦略論、資本予算論における柔軟性の問題として重要な研究課題となる[41]．Trigeorgis(1993) は、経営戦略の柔軟性を複合リアル・オプションズの集合体として表現して、各リアル・オプション間における相互依存性を分析している．経営政策上でよく直面する各投資オプション、例えば、投資の延期オプション、工場建設からの撤退オプション、工場規模の縮小オプション、工場の拡大オプション、工場の他用途への変更オプションなどから成るリアル・オプションズの連鎖・集合体を取り上げ、リアル・オプションズの総価値が各リアル・オプションの価値を単純に合計した値には必ずしも一致しないこと、つまり各リアル・オプションが互いに相互依存している事実を数値計算を用いて示している．

12　終わりに

本稿では、市場構造が独占的あるいは完全競争的であることを想定していたので、寡占市場の特徴である各企業の意思決定間に見られる相互依存関係を無視してきた．各企業のリアル・オプションズが戦略的に相互依存する場合、ゲーム論的な枠組みが必要となる．生産物市場が寡占的な市場である場合、今までのモデル分析では重視されなかった論点が登場する．すなわち、投資時期を先送りしたときには、ライバル企業が

[40] Paddock, et. al.(1988) の研究では、市場価格の不確実性だけが取り扱われているが、Cortazar, et al(2001) は市場価格のリスクおよび地学的・技術的なリスクの両方をモデルに導入している．

[41] Trigeorgis(1996) および Smit and Trigeorgis(2004) は、企業経営における柔軟性の問題をリアル・オプションの相互依存関係から理解することの重要性を指摘し、コーポレート・ファイナンスにおける資本支出予算問題をリアル・オプション・アプローチから再構成している．

当該市場における利潤機会を奪ってしまう可能性が生じる．産業組織論でよく知られている通り、不可逆的な投資にコミットすることが、ライバル企業が参入して得ようとする利潤機会を前もって先制的に確保して、ライバル企業の参入を阻止する戦略となりうる．また、新製品開発や製造効率改善を目指した R&D 投資プロジェクトに見られるように、最初に初期投資を実施した企業は、他企業に比較して、より多くの将来的成長機会の可能性を入手できる．投資が戦略的な先制権の確保や成長オプションとなるような場合には、投資を遅らせせることが投資オプションの価値を引き下げる効果をもつ．このようなメカニズムが働くケースにおいては、単純なリアル・オプション・モデルの結論は修正される必要があるので、どのように修正されるのかを理解するための研究が要請されることになる．Lambrecht and Perraudin(2003) は、先取りの可能性を持つ複占モデルを用いて、投資時期を決定する利潤の臨界値が、いわゆる NPV ルールで定める臨界値と単純なリアル・オプションモデルで計算される臨界値の間に位置することを示した．Weeds(2002) は、成功の可能性をポアッソン過程で定式化したモデルで、パテントを獲得するための R&D 競争投資を分析している．このモデルでは、R&D 投資のオプション価値を引き下げるような作用が必ずしも優越的になるとは限らないことが示されている．寡占市場における企業間の戦略的な相互依存関係の下でのリアル・オプションズ・モデル分析に関しては、別稿において詳細に考察することにする．

Appendix

Ω を確率事象のすべてを含む全体集合とする．Ω のすべての部分集合から構成される集合族 $\mathcal{F}$ が以下の３条件

(i) $\emptyset \in \mathcal{F}$

(ii) $F \in \mathcal{F}$ ならば、$F^c \in \mathcal{F}$ (F^c は F の補集合)、

(iii) $A_1, A_2, A_3, \ldots \in \mathcal{F}$ ならば、$A = \cup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$,

を満たすとき、$\mathcal{F}$ を Ω 上の σ 代数という．$\mathcal{F}$ 上に定義された確率を P とするとき、確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ を考えることができる．$\mathcal{S}$ を分離可能な完備距離空間、例えば、$\mathcal{S} = R^n$ とする．ある関数 x が Ω から空間 $\mathcal{S}$ への写像であり、σ 代数族 $\mathcal{F}$ に関して可測であると同時に、$\mathcal{S}$ のボレル集合族 $\mathcal{B}(\mathcal{S})$ に関しても可測であるならば、関数 x は確率ベクトルの定義を満たす．すべての開集合 $U \in \mathcal{S}$ に対して、$(\omega \in \Omega; x(\omega) \in U) \in \mathcal{F}$ が成立するとき、関数 x は $\mathcal{F}$ に関して可測であるという．$\mathcal{S}$ のすべての開部分集合からなる σ 代数族をボレル集合族という．確率過程 ξ は、パラメター集合 $\mathcal{T}$ に属する時刻 t に対して確率ベクトル $\xi(t, \cdot)$ を対応させるものである．時刻の集合 $\mathcal{T}$ は通常 1 次元実数空間 R^1 の部分集合である．ここでは、時刻の集合 $\mathcal{T}$ は実数のコンパクトな区間とし、$[t_0, t_1]$ あるいは $[0, T]$ と表現する．こうして、確率過程 $\xi = \xi(\cdot, \cdot)$ は直積集合 $\mathcal{T} \times \Omega$ から集合 $\mathcal{S}$ への写像となっている．集合 $\mathcal{S}$ は確率過程の状態空間と呼ばれている．$\xi(\cdot, \omega)$ が Ω のほとんどすべての点 ω に対して $\mathcal{T}$ 上で連続ならば、確率過程 ξ は連続な確率過程と言われる．$\mathcal{T}$ 上の関数 $\xi(\cdot, \omega)$ は確率過程 ξ のサンプル関数 (経路) と言われる．したがって、確率過程の連続性はサンプル関数の連続性を含意する．

パラメター集合 $\mathcal{T}$ の任意な各時刻、$s_0 < s_1 < s_2 < \cdots < s_m$ に対して、確率ベクトル

$$\xi(s_0), \xi(s_1) - \xi_(s_0), \ldots, \xi(s_m) - \xi(s_{m-1})$$

が独立であるならば、確率過程 ξ は独立な増分 (independent increments) を持つという．独立増分を持つ定型的な確率過程の一つはブラウン運動である．以下にブラウン運動の定義を示す．

定義 12.1 (**ブラウン運動**)
以下の条件を満たす *1* 次元確率過程 w をブラウン運動という．

(1). ほとんどすべての $\omega \in \Omega$ に対して、$w(t_0) = 0$ である．

(2). w は定常的な独立増分を持つ．

(3). 増分 $w(t) - w(s)$ は、任意の $t, s \in \mathcal{T}$ に対して、平均値ゼロ、分散 $\sigma^2|t-s|$ を持つ正規分布となる．

(4). ほとんどすべての $\omega \in \Omega$ に対して、サンプル経路 $w(t)$ は時間に関して連続である．

この定義は、Lipster and Shiryayev(1977) による．ブラウン運動 (Brownian motion) は別名ウイーナー過程 (Wiener process) とも言われる．厳密に言うと、ウイーナー過程とブラウン運動の定義は微妙に異なっているが、Levy の定理によってこれらは等価な確率過程であることが証明できる．詳しくは、Lipster and Shiryayev(1977) を参照してください．上記の条件で、σ は正の定数である．$\sigma = 1$ のとき、標準ブラウン運動という．良く知られているように、ブラウン運動はマーティンゲールである．つまり、

$$E[w(t)|\mathcal{F}(s)] = w(s),\ 0 \leq s \leq t$$

が成り立つ．ただし、$\mathcal{F}(s)$ はブラウン運動のフィルトレーション (時刻 s までに実現されたブラウン運動のサンプル経路から生成される σ 代数) である．$E[\cdot|\mathcal{F}(s)]$ は $\mathcal{F}(s)$ のもとでの条件付期待値オペレータである．確率過程 $\{x\}$ の二次変分 (quadratic variation) は

$$\langle x, x\rangle(t, \omega) = \lim_{\Delta t_k \to 0} \sum_{t_k \leq t} |x(t_{k+1}, \omega) - x(t_k, \omega)|^2, \text{ in Probability}$$

と定義される．ただし、$0 = t_1 < t_2 < t_3 < \cdots < t_n = t,\ \Delta t_k = t_{k+1} - t_k,\ k = 1, 2, ldots, n-1$ である．厳密な定義については、Chung and Williams(1990)、Karatzas and Shreve(1991) あるいは Protter(1990) などを参照してください．この定義から、ブラウン運動の 2 次変分は

$$\langle w, w\rangle(t) = \sigma^2 t$$

となるので、直感的には

$$dw(t)dw(t) = \sigma^2 dt$$

と表現される．ブラウン運動の 2 次変分がゼロにならない性質が確率計算上で重要な帰結をもたらす．さらに、ブラウン運動のサンプル関数は連続であるが、微分可能ではない．この微分不可能性は、ブラウン運動を含めて確率過程を微分方程式で表現しようとするとき、特異な問題を発生させる．伊藤清を含めた数学者たちがこの問題を解決するための概念および解析手法を開発してきた．$\phi(t),\ t \geq 0$ をフィルトレーション $\mathcal{F}(t)$ に適合した関数 ($\mathcal{F}(t)$ に関して可測な関数) とし、

$$E\int_0^T \phi(t)^2 dt < \infty$$

が成立するとする．ただし、T は確率過程の終端時刻とする．このとき、

$$I(t) = \int_0^t \phi(u) dw(u)$$

と表現される確率積分が定義できる．通常、伊藤清氏によって提案された定義が使用されている．状態空間で長さ 1 を 2^n 等分に分割するような部分集合 $A_k = [\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}),\ k = 0, 1, 2, \ldots$ を考える．ここで、n は自然数とする．特性関数 1_{A_k} は集合 A_k 上で 1 をとり、それ以外ではゼロとなる関数である．関数 ϕ が

$$\phi(t, \omega) = \sum_{j \geq 0} e_j(\omega) 1_{A_j}(t)$$

と表現できるとしよう．このとき、ϕ は単純関数といわれる．$t_k = k2^{-n}$ とおくと、この関数は

$$\phi(t,\omega) = \sum_{j\geq 0} e_j(\omega) 1_{[t_j,t_{j+1})}(t)$$

と書き直すことができる．単純関数 ϕ に対して確率積分を

$$I(t) = \int_0^t \phi(u)dw(u) = \sum_{j\geq 0} e_j(\omega)[w(t_{j+1},\omega) - w(t_j,\omega)]$$

と定義する. ただし、$t_k \leq t$ のとき $t_k = k2^{-n}$、$t_k > t$ のとき $t_k = t$ とする. この積分を伊藤確率積分という. 確率積分は単純関数の極限となりうるすべての関数に対して定義できる．簡単に言えば、ブラウン運動のフィルトレーション $\mathcal{F}(t)$ に適合する、有界で可測な関数の関数族に属するすべての関数に対して、確率積分を定義することができる．確率積分は以下の性質を持つ.

定理 12.1
関数 f は $\mathcal{B} \times \mathcal{F}$ 上で可測で、$\mathcal{F}(t)$ に関して可測であり、 $E\int_0^T \phi(t)^2 dt < \infty$ であるとする．このとき、

(1). $\int_0^t f(u)dw(u)$ は時間 t に関して連続である.

(2). $\int_0^t f(u)dw(u)$ は $\mathcal{F}(t)$ に関して可測である.

(3). $\int_0^t f(u)dw(u)$ はマーティンゲールである.

(4). $E\int_0^t f(u)dw(u) = 0,\ E(\int_0^t f(u)dw(u))^2 = E\int_0^t f^2(u)du$.

(5). $\langle \int_0^t f(u)dw(u), \int_0^t f(u)dw(u) \rangle(t) = \int_0^t f^2(u)du$.

確率積分の厳密な定義およびその性質に関しては、Øksendal(1985)、Chung and Williams(1990) あるいは Protter(1990) を参照してください.

引用文献

(1). Andrew B. Abel(1983), Optimal Investment under Uncertainty, *American Economic Review*, 73(1), 228-233.

(2). Andrew B. Abel(1985), A Stochastic Model of Investment, Marginal q and the Market Value of the Firm, *International Economic Review*, 26(2), 305-322.

(3). Andrew B. Abel and Janice C. Eberly(1994), A Unified Model of Investment Under Uncertainty, *American Economic Review*, 84(1).

(4). Andrew B. Abel and Janice C. Eberly(1996), Optimal Investment with Costly Reversibility, *Review of Economic Studies*, 63, 581-593.

(5). Andrew B. Abel and Janice C. Eberly(1999), The Effects of Reversibility and Uncertainty on Capital Accumulation, *Journal of Monetary Economics*, 44, 339-377.

(6). Andrew B. Abel and Janice C. Eberly(2002), Investment and q with Fixed Costs: An Empirical Analysis, NBER Working Paper.

(7). Andrew B. Abel, Avinash K. Dixit, Janice C. Eberly, and Robert S. Pindyck(1996), Options, the Value of Capital, and Investment, *Quarterly Journal of Economics*, 111(3), 753-777.

(8). Kenneth J. Arrow(1968), Optimal Capital Policy with Irreversible Investment, in J. N. Wolf(ed.), *Value, Capital, and Growth: pepers in Honour of Sir John Hicks*, Edinburgh University Press.

(9). Jonathan B. Berk, Richard C. Green and Vasant Naik(2004), Valuation and Return Dynamics of New Ventures, *Review of Financial Studies*, 17(1), 1-35.

(10). Fischer Black and Myron Scholes(1973), The Pricing of Options and Corporate Liabilities, *Journal of Political Economy*, 81, 637-654.

(11). Michael J. Brennan and Eduardo S. Schwartz(1985), Evaluating Natural Resources Investment, *Journal of Business*, 58(2), 135-157.

(12). Ben S. Bernanke(1983), Irreversibility, Uncertainty, and Cyclical Investment, *Quarterly Journal of Economics*, 98(1), 85-106.

(13). Guiseppe Bertola and Ricardo J. Caballero(1994), Irreversibility and Aggregate Investment, *Review of Economic Studies*, 61, 223-246.

(14). Ricardo J. Caballero and Robert S. Pindyck(1996), Uncertainty, Investment, and Industry Evolution, *International Economic Review*, 37(3), 641-662.

(15). Peter Carr(1988), The Valuation of Sequential Exchange Opportunities, *Jounral of Finace*, 43(5), 1235-1256.

(16). Paul D. Childs, Steven H. Ott and Alexander J. Triantis(1998), Capital Budgeting for Interrelated Projects: A Real Options Approach, *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 33(3), 305-334.

(17). Paul D. Childs and Alexander J. Triantis(1999), Dynamic R& D Investment Policies, *Management Science*, 45(10), 1359-1377.

(18). K.L. Chung and R.J. Williams(1990), *Introduction to Stochastic Integration*, Birkhauser.

(19). Gonnzalo Cortazar, Eduard S. Schwartz and Jaime Casassus(2001), Optimal Exploration Investments under Price and Geological-Technical Uncertainty: a Real Options Model, *R&D Management*, 31(2), 181-189.

(20). Partha Dasgupta and Joseph Stiglitz(1980), Uncertainty, Industrial Stucture, and the Speed of R&D, *Bell Journal of Economics*, 11, 1-28.

(21). Avinash Dixit(1988), A General Model of R&D Competition and Policy, *Rand Journal of Economics*, 19(3), 317-326.

(22). Avinash Dixit(1989), Entry and Exit Decisions under Uncertainty, *Journal of Political Economy*, 97(3), 620-638.

(23). Avinash K. Dixit and Robert S. Pindyck(1994), *Investment Under Uncertainty*, Princeton University Press.(日本語訳あり)

(24). J. L. Doob(1953), *Stochastic Processes*, John Wiley & Sons.

(25). Darrell Duffie(1992, 2001), *Dynamic Asset Pricing Theory*, the third edition, Princeton University Press.(日本語訳あり)

(26). Wendell H. Fleming and Raymonnd W. Rishel(1975), *Deterministic and Stochastic Optimal Control*, Springer-Verlag.

(27). Robert Geske(1979), The Valuation of Compound Options, *Journal of Financial Economics*, 7(1), 63-81.

(28). Gene M. Grossman and Carl Shapiro(1986), Optimal Dynamic R&D Programs, *Rand Journal of Economics*, 17(4), 581-593.

(29). Sebatian Gryglewicz, Kuno J. M. Huisman, and Peter M. Kort(2008), Finite Project Life and Uncertainty Effects on Investment, *Journal of Economic Dynamics and Control*, 32, 2191-2213.

(30). Jason C. Hsu and Eduardo S. Schwartz(2003), A Model of R&D Valuation and the Design of Research Incentives, Anderson School, UCLA, Working Paper.

(31). Ioannis Karatzas and Steven E. Shreve(1991), *Brownian Motion and Stochastic Calculus*, second edition, Springer-Verlag.(日本語訳あり)

(32). Ioannis Karatzas and Steven E. Shreve(1998), *Methods of Mathematical Finance*, Springer-Verlag.

(33). Samuel Karlin and Howard M. Taylor(1975), *A First Course in Stochastic Processes*, Academic Press.

(34). Samuel Karlin and Howard M. Taylor(1981), *A Seccond Course in Stochastic Processes*, Academic Press.

(35). Tom Lee and Louis L. Wilde(1980), Market Structure and Innovation: A Reformulation, *Quarterly Journal of Economics*, 94, 429-436.

(36). Glenn C. Loury(1979), Market Structure and Innovation, *Quarterly Journal of Economics*, 93, 395-410.

(37). Brt Lambrecht and William Perraudin(2003), Real Options and Preemption under Incomplete Information, *Journal of Economic Dynamics and Control*, 27, 619-643.

(38). R. S. Liptser and A. N. Shiryayav(1977), *Statistics of Random Processes I: General Theory*, Translated by A. B. Aries, Springer-Verlag.

(39). Sman Majd and Robert S. Pindyck(1987), Time To Build, Option Value, and Investment Decisions, *Journal of Financial Economics*, 18(1), 7-27.

(40). William Margrave(1978), The Value of an Option to Exchange One Asset for Another, *Journal of Finance*, 33(1), 177-186.

(41). Koichi Mashiyama(2009), The Effects of Uncertainty and Irreversibility on Investment, Meiji Gakuin University Department of Economics, Discussion Paper no.09-01.

(42). Robert McDonald and Daniel Siegel(1985), Investment and the Valuation of Firms When There is an Option to Shut Down, *International Economic Review*, 26(2), 331-349.

(43). Robert McDonald and Daniel Siegel(1986), The Value of Waiting to Investment, *Quarterly Journal of Economics*, 101(4), 707-728.

(44). Kristian R. Miltersen and Eduardo S. Schwartz(2004), R&D Investments with Competitive Interactions, *Review of Finace*, 8, 355-401.

(45). Robert C. Merton(1973a), An intertemporal Capital Asset Pricing Model, *Econometrica*, 41(5), 867-887.

(46). Robert C. Merton(1973b), Theory of Rational Option Pricing, *Bell Journal of Economics*, 29, 141-183.

(47). Robert C. Merton(1990), *Continuous-Time Finance*, Blackwell.

(48). Marek Musiela and Marek Rutkowski(1997), *Martingale Methods in Financial Modelling*, Springer.

(49). Salih N. Neftci(2000), *An Introduction to the Mathematics of Financial Derivatives*, second edition, Academic Press. (日本語訳あり)

(50). Bernt Øksendal(1985,2005), *Stoshatic Differential Equations*, sixth edition, Springer-Verlag.(日本語訳あり)

(51). James L. Paddock, Daniel R. Siegel and James L. Smith(1988), Option Valuation of Claims on Real Assets: The Case of Offshore Petroleum Leases, *Quarterly Journal of Economics*, 103(3), 479-508.

(52). Robert S. Pindyck(1982), Adjustment Costs, Uncertainty and the Behavior of the Firm, *American Economic Review*, 72(3), 415-427.

(53). Robert S. Pindyck(1988), Irreversible Investment, Capacity Choice, and the Value of the Firm, *American Economic Review*, 78(5), 969-985.

(54). Robert S. Pindyck(1991), Irreversibility, Uncertainty, and Investment, *Journal of Economic Literature*, 29(3), 1110-1148.

(55). Philip E. Protter(1990), *Stochastic Integration and Differential Equations*, Springer.

(56). Jennifer Reinganum(1983), Uncertain Innovation and the Persistence of Monopoly, *American Economic Review*, 73(4), 741-748.

(57). Daniel Revuz and Marc Yor(1991), *Continuous Martingales and Brownian Motion*, Springer.

(58). H.L. Royden(1968), *Real Analysis*, second edition, Macmillan.

(59). Sudipto Sarkar(2000), On the Investment-Uncertainty Relationship in a Real Options Model, *Journal of Economic Dynamics and Control*,　24、219-225.

(60). Han T.J. Smit and Lenos Trigeorgis(2004), *Strategic Investment: Real Options and Games*, Princeton University Press.

(61). Eduard S. Schwartz(2004), Patents and R&D as Real Options, *Economic Notes*, 33, 23-54.

(62). Steven E. Shreve(2004), *Stochastic Calculus for Finance II: Continuous-Time Models*, Springer.(日本語訳あり)

(63). Lenos Trigeorgis(1993), The Nature of Option Interactions and the Valuation of Investments with Multiple Real Options, *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 28(1), 1-20.

(64). Lenos Trigeorgis(1996), *Real Options: Managerial Flexibility and Strategy in Resource Allocation*, MIT Press.

(65). Helen Weeds(1999), 'Reverse Hysteresis': R&D Invetment with Stochastic Innovation, Warwick University, Working Paper.

(66). Helen Weeds(2002), Strategic Delay in a Real Options Model of R&D Competition, *Review of Economic Studies*, 69, 729-747.

(67). Kit Pong Wong(2007), The Effect of Uncertainty on Investment Timing in a Real Options Model, *Journal of Economic Dynamics and Control*, 31, 2152-2167.