

# 経済現象の確率力学系によるモデル化

増山 幸一

明治学院大学経済学部

2007年6月

## 1 始めに

Frisch(1933)やSlutzky(1937)らによる景気循環論に見られるとおり、確率過程モデルを用いて経済分析を行う方法は、最近始められたものではなく、1930年代にまで遡る。周知の通り、時系列分析や計量経済学では確率過程論の知識は必須のものであったし、それ以外の経済学の多くの領域でも確率過程に基づくモデル化が重要な役割を果たすようになってきている。例えば、近年急速な発達を見せているファイナンス理論では、資産価格の変動を確率微分方程式によって表現して、これに基づいてブラック＝ショールズ方程式などから、オプション価格を計算するという手続きが取られる。リアル・オプション・アプローチでは、実物資本への投資から得られるであろう将来収益の変動が幾何的拡散過程のような確率微分方程式で表現できることを前提とし、その上で、動的最適化問題がダイナミック・プログラミングの手法あるいはポートフォリオ複製手法を用いて解くという手続きになっている。また、産業組織論さらにはゲームの理論でも確率過程モデルが使用されるようになってきている。さらに近年、1990年代以降、複雑系の経済学や経済物理学などに顕著に見られるように、経済現象を非線形確率過程モデルを用いて分析する研究が進展している。また、経済分析で常套手段であった代表的経済主体のモデル化を回避して、異質な多数の経済主体の相互作用からマクロ経済現象などを分析する研究も進展している。近年進展している研究アプローチは、非線形確率力学系による経済現象のモデル化とでも要約できるものである。

例えば、複雑系の経済学と呼ばれる領域において、確率過程モデルが果たす役割を取り上げてみると容易に理解できる。Brian Arthur(1988)が開始した収穫逓増の問題を明示的に分析する研究が典型例である<sup>1</sup>。従来から、収穫逓増の存在は複数の均衡点を生み出し、均衡の不確定性問題を引き起こすことが知られているが、彼は、一つの均衡点が歴史的に選択されていくメカニズムを非線形確率過程として定式化することに成功した。この方法では、非線形確率過程の一つであるポリア過程の経路依存性が利用されている。もう一つの典型例は、Alan Kirman(1992)による「代表的個人は誰をあるいは何を代表するのか？」というタイトルの論文に触発された研究である。さらなる典型例は、経済が異質な多数の主体の行動から形成されているという事実を明示的にモデル化しようとする青木正直の研究である<sup>2</sup>。Kirmanや青木などの研究に刺激されて、Workshop on Economics with Heterogeneous Interacting Agents(WEHIA)という名称の国際研究集会が、1996年以降毎年イタリアの大学を中心として、組織された。WEHIAにおいて報告された論文は、Springer Verlag社のLecture Notes on Economics and Mathematical Systemsのシリーズとなって公開されている。

<sup>1</sup>Brian Arthurの主要な論文は、*Increasing Returns and Path Dependency in the Economy*(1994)に所収されている。

<sup>2</sup>青木の研究手法は*New Approaches to Macroeconomic Modeling*(1996)および*Modeling Aggregate Behavior and Fluctuations in Economics*(2002)で詳細に展開されている。

また、1992年頃から経済物理学 (econophysics) と呼ばれる研究領域が急速に発展拡大している。経済物理学は、統計力学の領域で発展してきた非線形確率過程論、カオスの理論、およびフラクタル幾何学を分析枠組みとして、べき乗則分布 (power law distribution) を生み出す確率過程モデルを分析し、経済データの統計的な規則性や特徴 (フラクタル性といってもよい) が発生する因果関係を理解することを目的としている<sup>3</sup>。この研究領域での成果は物理学の学術雑誌、例えば、*Physica A* あるいは *Physical Review E* や *European Physical Journal B* などに発表され、ほとんどの研究が経済学者ではなく、物理学者の手によるものとなっている。Econophysics という名称は統計物理学者の Eugene Stanley によると言われ、Stanley が *Physica A* のエディターに就任して以降、経済物理学の論文が多数掲載されるようになったと言われている。分析対象は経済現象であるが、分析視点は物理学のものであると言う意味で、物理学の研究そのものであると主張されている。こうした意味で、この分野は経済学の分野というよりも、物理学の分野であるという理解になっている。経済物理学における研究の多くは、分析対象を主に金融資産市場における価格変動現象においている。一方、1980年代以降、Herman Haken や Wolfgang Weidlich を中心とした統計物理学者のグループは、異質な個人や主体が相互依存しながら生成する社会やシステムの動的な挙動を解明することを目的として、Synergetics あるいは Sociodynamics という名称の研究プロジェクトを開始して、幾多の研究成果を生み出している。この研究分野で用いられている数理的な方法は、統計物理学で発達したマスター方程式アプローチによる確率過程の分析手法である<sup>4</sup>。分析対象は経済学のみならず、生物学、政治学、地理学そして社会学などにまで及んでいる。経済学への応用では、伝統的な新古典派経済学との相性はよくないので、シュンペーターの伝統を継承していると主張する進化経済学 (evolutionary economics) と呼ばれている研究分野での貢献が大きい。

本稿では、マスター方程式アプローチによる非線形確率力学系のモデル化を解説し、その経済現象への応用を展望する。第2節で、確率過程のうち特に飛躍型マルコフ過程として定式化できる確率過程において、マスター方程式の導出方法を説明すると同時に、定常確率分布の導出方法についても簡単に説明する。第3節で、最初に、母関数を用いたマスター方程式の直接的解法を取り上げ、次いで、平均値と分散の動学方程式の導出方法を説明する。第3節の後半では、マスター方程式の近似解法として、フォッカー・プランクの方程式による近似方法と、級数展開による近似方法を取り上げる。第4節で、非線形確率力学系によって経済現象をどのようにモデル化できるかを検討する。二者択一意思決定問題を確率力学系モデルによって定式化し、このモデルを各種の経済問題に応用する。こうしたモデル分析を通して、経済問題への新しいアプローチがどのように可能になるのかについて明らかにする。

## 2 マスター方程式の導出

### 2.1 確率過程

システムの状態は時間の経過と共に変動する。システムが取り得る状態の集合を状態空間といい、状態空間を記号  $S$  で表現する。このとき、システムの状態  $X \in S$  は時間と共に変化するので、時間  $t$  をパラメータとして、 $X_t$ 、あるいは  $X(t)$  のように表現できる。パラメータ  $t$  が取り得る値の集合を  $T$  で表記する。集合  $T$  は離散的な点列からなる集合であっても、実数の閉区間であってもかまわない。時刻  $t$  でのシステ

<sup>3</sup>フラクタル幾何学という名称は、Mandelbrot によって1982年に著書 *The Fractal Geometry of Nature* を通して提案されたものであるが、もともとは彼が1960年代に行った所得分布や価格変動に関するデータ分析から見出された概念である。Mandelbrot の主要な研究は *Fractals and Scaling in Finance: Continuity, Concentration, and Risk*, Springer(1997) に所収されている。

<sup>4</sup>典型的な研究成果は、Weidlich と Haag による *Concepts and Models of a Quantitative Sociology*, Springer(1983) に所収されている。

ムの状態  $X_t$  がある確率分布に従って生起するとき、 $\{X_t, t \in T\}$  を確率過程と呼ぶ。システムの状態は確率法則に従って変化するので、明らかに  $X_t$  は確率変数になっている。

厳密に表現すると、以下ようになる。  $A$  を状態空間  $\mathcal{S}$  から作られた任意のボレル集合とすると、各  $t \in T$  に対して、集合  $\{\omega : X_t(\omega) \in A\}$  は全体集合  $\Omega$  の部分集合である。この部分集合から生成される  $\omega$  の集合族、つまり、 $\sigma$  代数族を  $\mathcal{F}_T$  とする。確率測度  $P$  が  $\mathcal{F}_T$  の上で定義できるならば、 $X_t$  は確率空間  $(\Omega, \mathcal{F}_T, P)$  上で定義される確率変数である。つまり、 $X_t : \Omega \rightarrow \mathcal{S} (X_t \in \mathcal{S}, t \in T)$  である。

このように確率過程は、ある確率空間上に定義された確率変数の系  $\{X_t, t \in T\}$  によって定義される。パラメーターの集合  $T$  が、 $(-\infty, \infty)$  の部分区間で正の長さを持つとき、確率過程は連続パラメーター過程と言われる。他方、 $T$  が、整数のような可算個の要素からなるとき、離散パラメーター過程と言われる。離散パラメーター過程のとき、通常パラメーター集合は  $T = \{0, 1, 2, \dots\}$  と表現される。以下で定義する推移確率と確率測度の表記に混乱を起こさないために、確率測度の表記として  $P$  の代わりに  $\Pr$  を用いる。

システムの状態  $X$  のとり得る値は一般的には実数空間の部分集合である。複素数空間であってもかまわない。状態空間  $\mathcal{S}$  が  $\{0, 1, 2, \dots\}$  あるいは  $\{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$  であるとき、離散的確率過程という。  $\mathcal{S} = (-\infty, \infty)$  であるとき、実数値確率過程と言う。  $\mathcal{S}$  が  $k$  次元ユークリッド空間のとき、 $k$  次元ベクトル値確率過程という。

以下に確率過程の重要な分類方法を説明する。

### 1. マルコフ過程 (Markov processes)

任意の  $t_1 < t_2 < \dots < t_n < t$  および任意の  $x_1, x_2, \dots, x_n, x$  に対して、

$$\Pr\{X_t \leq x | X_{t_1} = x_1, X_{t_2} = x_2, \dots, X_{t_n} = x_n\} = \Pr\{X_t \leq x | X_{t_n} = x_n\}$$

が成り立つとき、 $\{X_t, t \in T\}$  をマルコフ過程であるという。マルコフ過程は現在の状態が与えられると、将来状態の生起確率は現在の状態にのみ依存して、過去の状態には依存しない過程である。確率過程の多くはマルコフ過程として定式化することができる。後節で登場するポアソン過程、出生・死滅過程やランダム・ウォークはマルコフ過程の典型例である。

$$P(x, t_n; y, t_{n+1}) = \Pr\{X(t_{n+1}) = y | X(t_n) = x\}$$

を推移確率という。推移確率  $P(x, t_n; y, t_{n+1})$  が時間差  $t_{n+1} - t_n$  のみに依存するとき、このマルコフ過程は時間的に一様であるといい、定常なマルコフ過程という。

### 2. 加法過程 (Processes with independent increments)

任意の  $t_1 < t_2 < \dots < t_n$  に対して、

$$X_{t_2} - X_{t_1}, X_{t_3} - X_{t_2}, \dots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$$

が独立であるとき、 $\{X_t\}$  を加法過程 (独立増分をもつ過程) という。ポアソン過程や拡散過程を代表するウィーナー過程は加法過程の代表的な具体例である。

### 3. マーチンゲール (Martingales)

$\{X_t\}$  を  $E\{|X_t|\} < \infty$  なる実数値確率過程とする。任意の  $t_1 < t_2 < \dots < t_n < t$  および任意の  $a_1, a_2, \dots, a_n$  に対して、

$$E(X_t | X_{t_1} = a_1, \dots, X_{t_n} = a_n) = a_n$$

が成り立つとき、 $X_t$  はマーチンゲールであるという。マーチンゲールの例は、効率的な資本市場での株価の変動などに見られる。

## 2.2 飛躍型マルコフ過程

状態空間  $\mathcal{S}$  が有限個もしくは可算無限個の要素からなるとする。パラメータ  $t$  の集合が  $T = [0, \infty)$  であるとする。システムの状態  $X$  が初期時刻 0 で  $x_0$  にあったとする。時刻が  $\tau_1 > 0$  になった瞬間、状態が  $X(\tau_1) = x_1 (\neq x_0)$  にジャンプした。時刻がさらに経過して  $\tau_2 (> \tau_1)$  になった瞬間、状態が  $X(\tau_2) = x_2 (\neq x_1)$  にジャンプした。時刻  $\tau_1, \tau_2, \dots$  を飛躍時刻 (jump times) といい、

$$S_1 = \tau_1 - 0, \quad S_2 = \tau_2 - \tau_1, \quad S_3 = \tau_3 - \tau_2, \dots$$

を保持時間 (holding times) という。横軸に時間をとった平面上に状態の軌跡  $X(t)$  のグラフを描くと、右連続の階段状グラフとなる。システムの状態  $X(t)$  を時間の関数で表現すると、

$$X(t) = \begin{cases} x_0, & 0 \leq t < \tau_1, \\ x_1, & \tau_1 \leq t < \tau_2, \\ x_2, & \tau_2 \leq t < \tau_3, \\ \vdots & \end{cases}$$

このように、状態  $X(t)$  のグラフが右連続な (right-continuous) 階段関数で表現できるような確率過程を飛躍過程 (jump process) という。システムの状態が  $x_n$  (有限な数  $n$  に対して) に到達して以降ジャンプがなく、そのままの状態が維持されるとき、 $\tau_{n+1} = \infty$  と表現する。このような状態  $x_n$  を吸収状態 (吸収壁) という。システムの状態は吸収状態 (absorbing state) または非吸収状態 (non-absorbing state) のいずれかに分類される。

システムの状態の連鎖  $\{Y_n = X(\tau_n)\}$  を飛躍連鎖 (jump chains) という。システムが状態  $Y_n$  に到達したとき、状態  $Y_n$  から始まる飛躍連鎖は、状態  $Y_n$  に到達するまでの過去の歴史には依存しないので、飛躍連鎖はマルコフ過程である。しかし、飛躍過程がマルコフ過程になるためには保持時間 (holding times) がマルコフ性を満たさなければならない。つまり、飛躍過程がマルコフ過程であるためには

$$\Pr\{\tau_2 > t + s | \tau_1 > s\} = \Pr\{\tau_2 - \tau_1 > t\}, \quad s, t \geq 0, \quad (1)$$

が満たされなければならない。このマルコフ過程であるための必要十分条件を満たす確率分布は指数分布以外に存在しないことが証明できる。言い換えると、マルコフ過程であるためには、保持時間が指数分布に従うことを仮定する必要がある。

初期状態  $x$  から始まる飛躍過程が時刻  $t$  で状態  $y$  になる確率を  $P_{x,y}(t)$  または  $P_x(X(t) = y)$  で表現する。つまり、

$$P_{x,y}(t) \equiv P_x(X(t) = y) \equiv \Pr(X(t) = y | X(0) = x),$$

であり、

$$\sum_{y \in \mathcal{S}} P_{x,y}(t) = 1$$

が満たされている。特に、 $t = 0$  のとき、 $P_{x,y}(0) = \delta_{xy}$  である。さらに、初期状態の確率分布を  $\pi_0(x) \geq 0, x \in \mathcal{S}$  とすると、

$$P(X(t) = y) = \sum_{x \in \mathcal{S}} \pi_0(x) P_{x,y}(t),$$

である。ただし、

$$\sum_{x \in \mathcal{S}} \pi_0(x) = 1.$$

よく知られている通り、飛躍過程は定常なマルコフ過程である (推移確率が時間に依存しない) ことを前提とすると、 $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_n$  と  $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathcal{S}$  に対して、

$$\Pr(X(t_n) = x_n | X(t_1) = x_1, \dots, X(t_{n-1}) = x_{n-1}) = P_{x_{n-1}, x_n}(t_n - t_{n-1})$$

というマルコフ性が成立する。さらに、

$$\Pr(X(t_2) = x_2, \dots, X(t_n) = x_n | X(t_1) = x_1) = P_{x_1, x_2}(t_2 - t_1) \cdots P_{x_{n-1}, x_n}(t_n - t_{n-1})$$

という関係式が成立する。よって、

$$P_x(X(t) = z, X(t+s) = y) = P_{x,z}(t)P_{z,y}(s), \quad t \geq 0, s \geq 0,$$

である。また、

$$P_{x,y}(t+s) = \sum_{z \in \mathcal{S}} P_x(X(t) = z, X(t+s) = y),$$

が成立しているので、

$$P_{x,y}(t+s) = \sum_{z \in \mathcal{S}} P_{x,z}(t)P_{z,y}(s), \quad s \geq 0, t \geq 0, \quad (2)$$

が成立する。この式はチャプマン・コルモゴロフ (Chapman-Kolmogorov) の方程式と呼ばれる。

## 2.3 マスター方程式の導出

システムが時刻  $t$  で状態  $X(t) = y$  にある確率は

$$\Pr(X(t) = y) = \sum_{z \in \mathcal{S}} \pi_0(z)P_{z,y}(t)$$

で記述される。初期状態が  $X(0) = x(0)$  であるならば、

$$\Pr(X(t) = y) = \sum_{z \in \mathcal{S}} \delta_{x(0), z} P_{z,y}(t)$$

である。このとき、 $\Pr(X(t) = y) = P_{x(0), y}(t)$  である。また、 $P_{0, y-x}(t) = P_{x, y}(t)$  が成立する。以下では、 $P_x(t)$  は  $P_{x(0), x}(t)$  を表現する。

時刻  $t$  での限界推移率 (infinitesimal parameters)  $w_{x,y}(t)$  の概念を用いると、微小な時間内における条件付確率の変化は

$$\Pr(X(t+h) = y | X(t) = x) - \Pr(X(t) = y | X(t) = x) = w_{x,y}(t) \cdot h + o(h) \quad (3)$$

と表現できる。この関係式は限界推移率の定義と理解しても良い。つまり、

$$w_{x,y}(t) \equiv \frac{dP_{x,y}(t)}{dt}$$

である。限界推移率は単位時間当たりの推移確率とも解釈できる。  $y$  に関して、式 (3) の和をとると

$$\sum_{y \in \mathcal{S}} P_{x,y}(h) - \sum_{y \in \mathcal{S}} P_{x,y}(0) = \sum_{y \in \mathcal{S}} w_{x,y}(t) \cdot h + o(h)$$

である。左辺第 1 項と第 2 項はそれぞれ 1 であるので、

$$\sum_{y \in \mathcal{S}} w_{x,y}(t) = 0$$

が成立しなければならない。したがって、

$$w_{x,x}(t) = - \sum_{y \neq x} w_{x,y}(t). \quad (4)$$

条件付確率のマルコフ性から、

$$\Pr(X(s) = y) = \sum_{x \in \mathcal{S}} \Pr(X(t) = x) \Pr(X(s) = y | X(t) = x)$$

が成立する。だから、

$$\begin{aligned} \Pr(X(t+h) = y) &= \sum_{x \in \mathcal{S}} \Pr(X(t) = x) \Pr(X(t+h) = y | X(t) = x) \\ &= \sum_{x \in \mathcal{S}} \Pr(X(t) = x) [\Pr(X(t) = y | X(t) = x) + w_{x,y}(t) \cdot h + o(h)] \\ &= \Pr(X(t) = y) + \sum_{x \in \mathcal{S}} \Pr(X(t) = x) [w_{x,y}(t) \cdot h + o(h)]. \end{aligned}$$

$h \rightarrow 0$  とすると、次式が得られる。

$$\frac{dP_y(t)}{dt} = \sum_{x \in \mathcal{S}} P_x(t) w_{x,y}(t) \quad .$$

この式の右辺を

$$\sum_{x \in \mathcal{S}} P_x(t) w_{x,y}(t) = \sum_{x \neq y} P_x(t) w_{x,y}(t) + P_y(t) w_{y,y}(t)$$

と変形して、右辺第 2 項に (4) 式

$$w_{y,y}(t) = - \sum_{x \neq y} w_{y,x}(t)$$

を代入すると、

$$\frac{dP_y(t)}{dt} = \sum_{x \neq y} P_x(t) w_{x,y}(t) - \sum_{x \neq y} P_y(t) w_{y,x}(t) \quad (5)$$

が得られる。統計力学では、式 (5) をマスター方程式と言う。右辺第 1 項は、状態  $y$  に流入する確率束を表現し、第 2 項は状態  $y$  から流出する確率束を表現している。限界推移率が時間に依存しないならば、確率過程は時間に一様であるという。このとき、

$$w_{xy} = w_{x,y}(t), \quad t \geq 0$$

となり、限界推移率は一定である。

確率過程が拡散過程のように、状態空間が連続であるとき、マスター方程式が以下になることは容易に類推できる。

$$\frac{dP_y(t)}{dt} = \int_S P_x(t)w_{x,y}(t)dx - \int_S P_y(t)w_{y,x}(t)dx \quad (6)$$

拡散過程のような連続値確率過程におけるマスター方程式の導出については、統計力学などの教科書を参照してください<sup>5</sup>。

## 2.4 飛躍過程の主要な例

状態空間  $S = \{0, 1, 2, \dots\}$  をもつ右連続な確率過程  $(X(t))_{t \geq 0}$  は、その各保持時間がパラメータ  $\lambda$  をもつ指数分布に従う独立な確率変数であり、その飛躍連鎖が  $Y_n = X(\tau_n) = n$  で与えられるならば、パラメータ  $\lambda$  をもつポアソン過程であるという。

$$\tau_0 = 0, \tau_n = S_1 + S_2 + \dots + S_n$$

とおくと、 $\tau_n$  は  $n$  回目のジャンプが起きる時刻を表現する。ポアソン過程は以下の定理に見られる通り、3通りの定義の仕方が存在する。

$(X(t))_{t \geq 0}$  を状態 0 から始まる右連続な整数値確率過程とする。  $0 < \lambda < \infty$  とする。このとき、以下の3条件は等価である。

(i). 確率過程  $(X(t))_{t \geq 0}$  の保持時間  $S_1, S_2, \dots$  はパラメータ  $\lambda$  をもつ互いに独立な指数分布確率変数であり、飛躍連鎖は  $Y_n = n, n = 1, 2, \dots$  で与えられる。

(ii).  $(X(t))_{t \geq 0}$  は独立な増分をもち、 $h$  が時間で一様に 0 に収束するとき、

$$\Pr(X(t+h) - X(t) = 0) = 1 - \lambda h + o(h), \quad \Pr(X(t+h) - X(t) = 1) = \lambda h + o(h)$$

が成り立つ。

(iii).  $(X(t))_{t \geq 0}$  は定常で、独立な増分をもち、任意の時刻  $t$  に対して、 $X(t)$  がパラメータ  $\lambda t$  のポアソン分布である。

上記のいずれかの条件が満たされるとき、 $(X(t))_{t \geq 0}$  は、パラメータ  $\lambda$  をもつポアソン過程と言われる。

ここで、条件 (ii) の限界推移率を用いてポアソン過程のマスター方程式を導出してみよう。  $P_x(t) = \Pr(X(t) = x | X(0) = 0)$  とおくと、

$$P_x(t+h) = (1 - \lambda h)P_x(t) + \lambda h P_{x-1}(t) + o(h), \quad x \geq 1,$$

$$P_0(t+h) = (1 - \lambda h)P_0(t) + o(h).$$

$h \rightarrow 0$  とすると、

$$\frac{dP_x(t)}{dt} = -\lambda P_x(t) + \lambda P_{x-1}(t), \quad x \geq 1, \quad (7)$$

$$\frac{dP_0(t)}{dt} = -\lambda P_0(t), \quad (8)$$

が得られる。初期条件は

$$P_x(0) = \delta_{0,x}$$

<sup>5</sup>例えば、van Kampen(1992) chapter 5.などを参照してください。

である。

また、ポアソン過程での限界推移率は

$$w_{x,y} = \begin{cases} \lambda, & y = x + 1, \\ -\lambda, & y = x, \\ 0, & y \neq x, x + 1 \end{cases}$$

で与えられるので、式 (5) に直接これらの推移率を代入しても同じ方程式が得られる。

マスター方程式 (7) を解くと、

$$P_x(t) = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^x}{x!} \quad (9)$$

となることが知られている<sup>6</sup>。

明らかに、ポアソン過程の限界推移率  $w_{x,x+1} = \lambda$  は、状態  $x$  には依存せず、一定な値である。限界推移率  $w_{x,x+1}$  が状態変数  $x$  に依存することを許容した確率過程モデルは、純出生過程 (pure birth processes) といわれる。状態が  $x$  のときの出生率  $w_{x,x+1}$  を  $\lambda_x$ ,  $x \geq 0$  とする。正確に表現すれば、 $h$  が一様に限りなくゼロに近づくとき、

$$\Pr(X(t+h) = x | X(t) = x) = 1 - \lambda_x h + o(h)$$

$$\Pr(X(t+h) = x+1 | X(t) = x) = \lambda_x h + o(h)$$

が成り立つと仮定する。

### 例 2.1 (線形出生過程)

出生率が

$$\lambda_x = x\lambda, \quad x \geq 0,$$

であるケースは線形出生過程と言われる。発見者の名前にちなんでユール・ファーリ過程とも言われる。

(5) 式から、純出生過程のマスター方程式が、

$$\begin{aligned} \frac{dP_y(t)}{dt} &= -\lambda_y P_y(t) + \lambda_{y-1} P_{y-1}(t), \quad y = 1, 2, \dots, \\ \frac{dP_0(t)}{dt} &= -\lambda_0 P_0(t), \quad P_y(0) = \delta_{x(0),y} \end{aligned}$$

となることは容易に理解できる。初期条件  $x(0) = 1$  でこの方程式を解くと、

$$P_y(t) = e^{-\lambda t} (1 - e^{-\lambda t})^{y-1}, \quad y \geq 1,$$

が得られる。この解の導出は後節 (3.1) で行う。

状態空間が離散的で加算個あるいは無限加算個の要素からなるときつまり、 $\mathcal{S} = \{0, 1, 2, \dots, d\}$  または  $\mathcal{S} = \{0, 1, 2, \dots, \infty\}$  であるとき、飛躍マルコフ過程の中で、限界推移率が条件

$$|y - x| > 1 \text{ のとき、} w_{xy} = 0$$

を満たす飛躍過程を出生死滅過程 (birth and death processes) という。状態  $x$  から出発する出生死滅過程は一回のジャンプで状態  $x-1$  または  $x+1$  にだけ推移できる。限界推移率  $w_{x,x+1}$  は出生率、 $w_{x,x-1}$  は死滅率と呼ばれる。出生率および死滅率は通常

$$\lambda_x = w_{x,x+1}, \quad \mu_x = w_{x,x-1}$$

<sup>6</sup>ポアソン過程の詳細な分析については、Karlin and Taylor(1975) を参照のこと。

と表記される.

出生死滅過程のマスター方程式を導出しておこう. マスター方程式は式 (5) より

$$\frac{dP_y(t)}{dt} = P_{y-1}(t)w_{y-1,y}(t) + P_{y+1}(t)w_{y+1,y} - P_y(t)w_{y,y+1}(t) - P_y(t)w_{y,y-1}(t), \quad (10)$$

となる. 出生率を  $\lambda_x$ 、死滅率を  $\mu_x$  と表記すると、出生死滅過程のマスター方程式は

$$\frac{dP_y(t)}{dt} = \lambda_{y-1}P_{y-1}(t) + \mu_{y+1}P_{y+1}(t) - (\lambda_y + \mu_y)P_y(t),$$

で与えられる. ただし、初期条件を  $x(0) = 0$  とすると、

$$\frac{dP_0(t)}{dt} = \mu_1P_1(t) - \lambda_0P_0(t),$$

である.

### 例 2.2 (線形出生死滅過程:フェーラー・アレイ過程)

状態  $x$  での出生率と死滅率が

$$\lambda_x = \lambda x, \quad \mu_x = \mu x \quad (\lambda, \mu > 0)$$

のように線形関数で与えられるとき、線形出生死滅過程と呼ばれる.

### 例 2.3 (移民を伴う線形出生・死滅過程)

出生率と死滅率が

$$\lambda_x = \lambda x + \alpha; \quad \mu_x = \mu x,$$

である.  $\alpha > 0$  とする. 明らかに、 $\lambda_0 = \alpha$  となっている.

移民を伴う線形出生・死滅過程のマスター方程式は、

$$\frac{dP_y(t)}{dt} = (\alpha + \lambda(y-1))P_{y-1}(t) - (\alpha + (\lambda + \mu)y)P_y(t) + \mu(y+1)P_{y+1}(t), \quad y \geq 1,$$

$$\frac{dP_0(t)}{dt} = \mu P_1(t) - \alpha P_0(t)$$

で与えられる.

## 2.5 定常確率分布

マルコフ過程において、確率分布  $\pi(x) \geq 0, x \in \mathcal{S}$  が

$$\sum_{x \in \mathcal{S}} \pi(x)P_{x,y}(t) = \pi(y), \quad y \in \mathcal{S}, t \geq 0, \quad (11)$$

が成立するとき、 $\pi$  は定常確率分布 (stationary probability distribution) であるという. ただし  $\sum_x \pi(x) = 1$  である. 定常確率分布が存在するならば、既約な飛躍マルコフ過程において、

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P_{x,y}(t) = \pi(y), \quad y \in \mathcal{S}$$

が成立する. このとき、初期状態がどうであれ、 $X(t)$  の分布は、 $t$  が無限に大きくなるにしたがって、 $\pi$  に収束する. 定常分布の条件式 (11) を時間で微分すると、

$$\sum_x \pi(x) \frac{dP_{x,y}(t)}{dt} = 0.$$

$t = 0$  とおくと、

$$\sum_x \pi(x)w_{x,y} = 0, \quad y \in \mathcal{S} \quad (12)$$

が成り立つことが確認できる。この条件は  $\pi$  が定常分布であるための必要十分条件となっている。定常分布は時間に関して一様なマルコフ過程で有効なので、ここでは、限界推移率が時間に依存しないこと、つまり、 $w_{x,y} = w_{x,y}(t)$ ,  $t \geq 0$  を仮定している。

マスター方程式 (5) を用いれば、

$$\sum_{x \neq y} \pi(x)w_{x,y} = \sum_{x \neq y} \pi(y)w_{y,x}$$

が定常分布であるための必要十分条件となる。この関係式は、フルバランス方程式と呼ばれ、状態  $y$  に流入する確率束の大きさと状態  $y$  から流出する確率束の大きさが同一であることを意味する。さらに、あらゆる二つの状態間の確率束がバランスするとき、

$$\pi(x)w_{x,y} = \pi(y)w_{y,x}, \quad \forall x, y \in \mathcal{S}$$

が成立する。これを詳細バランスの条件という。

#### 例 2.4 (移民を伴う線形出生・死滅過程)

移民を伴う出生・死滅過程の定常確率分布 (均衡分布とも言う) を求めてみよう。出生率と死滅率は

$$w_{k,k+1} = \alpha + \lambda k, \quad w_{k,k-1} = \mu k$$

である。マスター方程式の左辺をゼロとおくと、

$$(\alpha + \lambda(k-1))\pi_{k-1} - (\alpha + (\lambda + \mu)k)\pi_k + \mu(k+1)\pi_{k+1} = 0.$$

この式を変形すると、

$$(\alpha + \lambda(k-1))\pi_{k-1} - \mu k \pi_k = (\alpha + \lambda k)\pi_k - \mu(k+1)\pi_{k+1}$$

が得られる。左辺は状態  $k-1$  と状態  $k$  との間の詳細つりあい条件であり、右辺は状態  $k$  と状態  $k+1$  との間の詳細つりあい条件となっている。定常状態では、各状態間の確率束はバランスしているのので、左辺と右辺は共にゼロである。したがって、

$$\frac{\pi_k}{\pi_{k-1}} = \frac{\alpha + \lambda(k-1)}{\mu k}$$

が成立する。この漸化式をとくと、

$$\pi_k = \binom{\theta + k - 1}{k} \gamma^k (1 - \gamma)^\theta,$$

となる。ただし、 $\theta = \alpha/\lambda$ ,  $\gamma = \lambda/\mu$  である。

#### 例 2.5 (二者択一問題)

経済モデルによく登場する二者択一問題のモデルでの定常確率分布を取り上げる。総計で  $N$  名の各経済主体が存在し、各経済主体はグループ 1 を選択するか、グループ 2 を選択するかを決定する。グループ 1 に属する経済主体の総数を  $n$  とする。従って、グループ 2 に属する経済主体の数は  $N - n$  である。グループ 2 に属する経済主体 1 名がグループ 1 に移動する、つまりグループ 1 に属する経済主体の数が  $n$  から  $n+1$  に

変化する限界推移率を  $w_{n,n+1}$ 、グループ 1 に属する一人がグループ 2 に移動する限界推移率を  $w_{n,n-1}$  とする。ここでは、

$$\begin{aligned} w_{n,n+1} &= N\left(1 - \frac{n}{N}\right)\eta_1\left(\frac{n}{N}\right), \\ w_{n,n-1} &= N\left(\frac{n}{N}\right)\eta_2\left(\frac{n}{N}\right) \end{aligned}$$

と仮定する。ただし、

$$\eta_1\left(\frac{n}{N}\right) + \eta_2\left(\frac{n}{N}\right) = 1$$

である。マスター方程式は

$$\frac{dP_n(t)}{dt} = P_{n-1}(t)w_{n-1,n}(t) + P_{n+1}(t)w_{n+1,n} - P_n(t)w_{n,n+1}(t) - P_n(t)w_{n,n-1}(t),$$

である。左辺をゼロとおき、定常分布を  $\pi$  で表記するなら

$$\pi(n+1)w_{n+1,n} - \pi(n)w_{n,n+1} = \pi(n)w_{n,n-1} - \pi(n-1)w_{n-1,n}$$

が成立する。詳細釣り合いの条件式は

$$\pi(n+1)w_{n+1,n} = \pi(n)w_{n,n+1}$$

となる。この式から

$$\frac{\pi(n+1)}{\pi(n)} = \frac{w_{n,n+1}}{w_{n+1,n}} = \frac{N-n}{n+1} \frac{\eta_1\left(\frac{n}{N}\right)}{\eta_2\left(\frac{n+1}{N}\right)}, n = 0, 1, \dots,$$

となり、この漸化式を解くと

$$\pi(n) = \pi(0) C_{N,n} \prod_{k=1}^n \frac{\eta_1\left(\frac{k-1}{N}\right)}{\eta_2\left(\frac{k}{N}\right)}, n = 1, 2, \dots,$$

が得られる。ただし、

$$C_{N,n} = \frac{N!}{n!(N-n)!}$$

である。確率分布をエントロピーの形式で書き直すために、

$$\ln \pi(n) = -\ln B_n - \beta N U\left(\frac{n}{N}\right)$$

とポテンシャル関数  $U$  を用いて書き直す<sup>7</sup>。よって、

$$\ln \pi(n) = -\ln B_n - \beta N U\left(\frac{n}{N}\right) = \ln \pi(0) + \ln C_{N,n} + \sum_{k=1}^n \ln \left[ \frac{\eta_1\left(\frac{k-1}{N}\right)}{\eta_2\left(\frac{k}{N}\right)} \right], \quad (13)$$

が成立する。スターリングの公式

$$\ln M! = M \ln M - M$$

を用いると

$$\ln C_{N,n} \approx NH\left(\frac{n}{N}\right) + O(1/N)$$

---

<sup>7</sup>以下の展開は多くを Aoki(1996) に負っている。

と表現できる。ただし、関数  $H$  は

$$H\left(\frac{n}{N}\right) = -\frac{n}{N} \ln \frac{n}{N} - \left(1 - \frac{n}{N}\right) \ln \left[1 - \frac{n}{N}\right]$$

と定義されるシャannonのエントロピー関数である。

さらに、新しい関数  $g$  を

$$2\beta g\left(\frac{k}{N}\right) = \ln \frac{\eta_1\left(\frac{k-1}{N}\right)}{\eta_2\left(\frac{k}{N}\right)}$$

のように定義する。

これらの関係式を式 (13) に代入すると、

$$\beta NU\left(\frac{n}{N}\right) = -\ln B_n - \ln \pi(0) - NH\left(\frac{n}{N}\right) - \sum_{k=1}^n 2\beta g\left(\frac{k}{N}\right)$$

となる。ここで、 $x = n/N$ ,  $dx = 1/N$  とおくと

$$U(x) = -\frac{1}{\beta} [\ln B_n + \ln \pi(0)] dx - \frac{1}{\beta} H(x) - \sum_0^x 2g(x) dx$$

が得られる。  $N$  が十分大きいとき、 $1/N \approx 0$  であるので、和の項を積分で表現できるので

$$U(x) = -\frac{1}{\beta} H(x) - 2 \int_0^x g(x) dx \quad (14)$$

が成立する。関係式 (13) から、確率の尤度比  $\ln\left(\frac{\pi(n)}{\pi(0)}\right)$  を最大にする  $n$  を求めることは、ポテンシャル  $U(x)$  を最小にする  $x$  を求めることと等価である。最大尤度法で最も起こるであろう  $n = xN$  の値は

$$\frac{dU(x)}{dx} = -\frac{1}{\beta} \frac{dH(x)}{dx} - 2g(x) = 0$$

から求められる。すなわち、

$$\beta g(x) = -\frac{1}{2} \frac{dH(x)}{dx} = \frac{1}{2} \ln \frac{x}{1-x}$$

を解けばよい。この式を変形すれば、

$$x = \frac{e^{\beta g(x)}}{e^{\beta g(x)} + e^{-\beta g(x)}}$$

が得られる。この式の右辺は、統計力学では *Gibbs* 分布と呼ばれている確率分布である。

$N$  が非常に大きいければ、

$$2\beta g(x) = \ln \frac{\eta_1(x-dx)}{\eta_2(x)} \approx \ln \frac{\eta_1(x)}{\eta_2(x)}$$

と近似できるので、これを  $\eta_1$  について解くと、

$$\eta_1(x) = \frac{e^{\beta g(x)}}{e^{\beta g(x)} + e^{-\beta g(x)}}$$

となる。これも *Gibbs* 分布と呼ばれている確率分布関数となっている。  $\eta_1$  は、グループ 2 の人数が  $N - n$  であるとき、グループ 2 に所属する主体がグループ 2 からグループ 1 へと選択を変更する確率と考えられる。反対に、  $\eta_2$  はグループ 1 の主体が選択をグループ 2 に変更する確率と考えられる。この意思決定の変更確率はパラメータ  $\beta$  に依存している。  $\beta = 0$  の場合、  $\eta_1 = 1/2$  となり、グループ 1 に残留するか、グループ 2 に移動するかはほとんど無差別な状態になる。ところが、  $\beta$  の値が大きくなるにつれて、  $\eta_1$  の値が大きくなる。このことは  $\beta$  の値が増大することが、グループ 1 の優位性を示す情報量の増大を意味すると理解できる。逆に、  $\beta$  の値がゼロに近くづくことは、システムの不確実性が大きくなることを含意すると理解される。  $\beta$  の値は不確実性を示すパラメータであると理解できる。

### 3 マスター方程式の解法

#### 3.1 マスター方程式の直接的解法

マスター方程式を母関数で解く手法を説明する。始めに、ユール=ファーリ過程 (線形出生過程) のマスター方程式を解いてみよう。既に説明し通り、ユール=ファーリ過程のマスター方程式は、

$$\frac{dP_j(t)}{dt} = -\lambda j P_j(t) + \lambda(j-1)P_{j-1}(t), \quad j \geq 1. \quad (15)$$

で与えられる。初期条件  $P_j(0) = \delta_{1,j}$  とする。  $P_j(t)$  の母関数を

$$G(z, t) = \sum_{j=0}^{\infty} P_j(t) z^j$$

と定義する。この母関数を (15) 式に代入すると、

$$\frac{\partial G}{\partial t} = \lambda z(z-1) \frac{\partial G}{\partial z}$$

が得られる。ここから、

$$\frac{dt}{1} = \frac{dz}{-\lambda z(z-1)}$$

の一般解を求めると、

$$\frac{z-1}{z} e^{\lambda t} = c$$

が得られる。ここで、 $c$  は定数である。母関数は、ある任意の関数  $\phi$  を介して、  $G(z, t) = \phi(c)$  という関係を満たすので、

$$G(z, t) = \phi\left(\frac{z-1}{z} e^{\lambda t}\right)$$

である<sup>8</sup>。関数  $\phi$  の具体形を求めるために、初期条件を用いる。初期条件から、

$$G(z, 0) = z$$

である。よって、

$$z = \phi\left(\frac{z-1}{z}\right).$$

したがって、

$$\phi(x) = \frac{1}{1-x}.$$

この関数形を代入して、

$$G(z, t) = \frac{ze^{-\lambda t}}{1 - (1 - e^{-\lambda t})z}$$

が得られる。  $z$  の冪級数に展開すると、

$$G(z, t) = e^{-\lambda t} z \sum_{j=0}^{\infty} (1 - e^{-\lambda t})^j z^j, \quad |(1 - e^{-\lambda t})z| < 1.$$

$z^j$  の係数を求めると、

$$P_j(t) = e^{-\lambda t} (1 - e^{-\lambda t})^{j-1}, \quad j \geq 1,$$

---

<sup>8</sup>偏微分方程式の特性曲線による解法については、偏微分方程式のテキストを参照ください。

となる。コルモゴロフ方程式も同じように解くことができる。

次に、やや複雑な移民を伴う線形出生・死滅過程を取り上げてみよう。限界推移率は

$$w_{n,n+1} = \lambda n + \alpha, \quad w_{n,n-1} = \mu n$$

と与えられている。マスター方程式から、 $P_j(t)$  の母関数の方程式は、

$$\frac{\partial G}{\partial t} = \alpha(z-1)G + (\lambda z - \mu)(z-1)\frac{\partial G}{\partial z}$$

となる。この偏微分方程式を解けば、 $P_j(t)$  の非定常解を求めることができる。詳細は複雑なので、省略する<sup>9</sup>。

### 3.2 平均値と分散の動学方程式

マスター方程式は以下のように表現される。

$$\frac{dP_y(t)}{dt} = \sum_{x \in \mathcal{S}} \{P_x(t)w_{x,y}(t) - P_y(t)w_{y,x}(t)\} \quad (16)$$

ここで、 $P_x(t)$  は時刻  $t$  で状態が  $x$  にある確率、 $w_{x,y}(t)$  は状態  $x$  から  $y$  への限界推移率 (単位時間当たり推移率) である。

システムのマクロ変数を支配する動的方程式を求めてみよう。システムのマクロ状態を表現する変数として確率変数  $X$  の平均値や分散を用いることが多い。確率変数  $X$  の平均値は

$$\langle X \rangle_t = \sum_{x \in \mathcal{S}} x P_x(t),$$

と定義される<sup>10</sup>。マスター方程式 (16) から、

$$\frac{d\langle X \rangle_t}{dt} = \sum_x x \frac{dP_x(t)}{dt} = \sum_x \sum_y x \{P_y(t)w_{y,x} - P_x(t)w_{x,y}\} = \sum_x \sum_y (y-x)P_x(t)w_{x,y} \quad (17)$$

が得られる。ここで、

$$a_\nu(x) = \sum_y (y-x)^\nu w_{x,y}$$

と定義すると、

$$\frac{d\langle X \rangle_t}{dt} = \sum_x a_1(x)P_x(t) = \langle a_1(X) \rangle_t \quad (18)$$

という関係が成立する。 $\langle a_1(X) \rangle$  のテイラー級数展開

$$\langle a_1(X) \rangle = a_1(\langle X \rangle) + \frac{1}{2} \langle (X - \langle X \rangle)^2 \rangle a_1''(\langle X \rangle) + \dots,$$

の2次以上の項を無視すると (あるいは  $a_1$  が  $x$  の線形関数であるならば)、

$$\frac{d\langle X \rangle_t}{dt} = a_1(\langle X \rangle_t)$$

<sup>9</sup>母関数による解法の詳細は、青木 (2003)、第6章を参照のこと。

<sup>10</sup> $\langle X \rangle_t$  という表記法は統計力学でよく用いられる表現である。

となる．一般的には、平均値  $\langle X \rangle_t$  の動的な変動は  $\langle X \rangle_t$  の大きさだけでなく、 $x$  の高次モーメントの影響を受ける．もし確率変数の値の振幅の大きさが小さいならば、この式は非常に良い近似で成立するといえる．次に分散の変動を支配する方程式を導出しよう．

$$\frac{d\langle X^2 \rangle_t}{dt} = \sum_x x^2 \frac{dP_x(t)}{dt} = \sum_x \sum_y (y^2 - x^2) P_x(t) w_{x,y}$$

なので、

$$\frac{d\langle X^2 \rangle_t}{dt} = \sum_x \sum_y \{(y-x)^2 + 2x(y-x)\} P_x(t) w_{x,y} = \langle a_2(X) \rangle_t + 2\langle X a_1(X) \rangle_t$$

となる． $\sigma^2(t) = \langle X^2 \rangle_t - \langle X \rangle_t^2$  を用いると、

$$\frac{d\sigma^2}{dt} = \langle a_2(X) \rangle_t + 2\langle (X - \langle X \rangle_t) a_1(X) \rangle_t \quad (19)$$

が得られる． $a_1$  と  $a_2$  が  $x$  の 1 次関数であるならば、

$$\frac{d\sigma^2}{dt} = a_2(\langle X \rangle_t) + 2\sigma^2 a_1'(\langle X \rangle_t).$$

この式は、1 次関数でないときでも、確率変数の振幅が小さい場合には近似的に成立する．

### 例 3.1 (出生死滅過程)

出生死滅過程の平均と分散の変動方程式を求めてみよう．マスター方程式は (10) より

$$\frac{dP_y(t)}{dt} = \lambda_{y-1} P_{y-1}(t) + \mu_{y+1} P_{y+1}(t) - (\lambda_y + \mu_y) P_y(t), \quad y = 1, 2, \dots$$

ここで、

$$a_1(x) = \sum_y (y-x) w_{x,y} = w_{x,x+1} - w_{x,x-1} = \lambda_x - \mu_x$$

である．よって、平均値の動的挙動を支配する微分方程式は

$$\frac{d\langle y \rangle}{dt} = -\langle \mu_y \rangle + \langle \lambda_y \rangle$$

となる．同様に、

$$a_2(x) = \sum_y (y-x)^2 w_{x,y} = 1^2 \cdot w_{x,x+1} + (-1)^2 \cdot w_{x,x-1} = \lambda_x + \mu_x$$

となるので、分散の動的変動を支配する方程式も

$$\frac{d\langle y^2 \rangle}{dt} = 2\langle y(\lambda_y - \mu_y) \rangle + \langle \lambda_y + \mu_y \rangle$$

に従うことが簡単に分かる．

もし推移率  $\lambda_x$  と  $\mu_x$  が状態変数  $x$  の線形関数であるならば、平均値の動的な挙動は分散の変動の影響を受けない．しかし、もしそうでなければ、平均値の変動は分散などの高次モーメントの変化からも影響を受ける．この場合、平均値の動的な変動を解析的表現することは難しく、数値計算に頼る必要が生じる．

### 3.3 フォッカー・プランク方程式の導出

確率変数が連続である場合、コルモゴロフ方程式はフォッカー・プランクの方程式と呼ばれている方程式となる。経済主体の数が非常に大きくなる時、ある特定のタイプの主体が全体に占める比率の変動などを計算する必要がある。このように整数値確率変数を実数値変数に変換する必要がある場合、マスター方程式からフォッカー・プランクの方程式を導出する必要がある。この節では、マスター方程式からフォッカー・プランクの方程式を導出する方法について説明する。

マスター方程式は確率変数が連続である場合を含めて、一般性を失うことなく以下のように表現できる。

$$\frac{dP_y(t)}{dt} = \int P_x(t)w_{x,y}(t)dx - \int P_y(t)w_{y,x}(t)dx \quad (20)$$

推移率  $w_{x,y}$  が飛躍の大きさ  $r = y - x$  に依存するので、

$$W(x; r) \equiv w_{x, x+r}$$

と推移率変数を改めて定義し直す。また、確率変数  $y$  が連続である場合を取り扱っているという意味で、状態確率を

$$P(y, t) \equiv P_y(t)$$

と表記し直す。この新しい表記法を用いると、式 (20) は

$$\frac{\partial P(y, t)}{\partial t} = \int P(y-r, t)W(y-r; r)dr - \int P(y, t)W(y; -r)dr$$

となる。ここで、飛躍の大きさは小さく、推移率  $W(x; r)$  は  $r$  に関して単峰分布をしており、 $x$  の変化に敏感に反応しない関数であることを仮定する。正確には、

$$|r| > \delta \text{ に対して, } W(x; r) \approx 0,$$

$$|\Delta x| < \delta \text{ に対して, } W(x + \Delta x; r) \approx W(x; r),$$

となるような  $\delta > 0$  が存在することを仮定する。また、 $P(y, t)$  も  $y$  の微小な変化には大きく反応しないことを仮定する。この仮定のもとで、マスター方程式の右辺第1項をテイラー級数展開すると、

$$\begin{aligned} \frac{\partial P(y, t)}{\partial t} = & \int P(y, t)W(y; r)dr - \int r \frac{\partial}{\partial y} \{W(y; r)P(y, t)\}dr + \frac{1}{2} \int r^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} \{W(y; r)P(y, t)\}dr \\ & - \int P(y, t)W(y; -r)dr + o(r^2), \end{aligned}$$

が得られる。上の式の右辺第1項と第4項は打ち消しあうので、第2項と第3項だけが残る。前節と同様に

$$a_\nu(y) = \int_{-\infty}^{\infty} r^\nu W(y; r)dr$$

と定義すると、以下のような偏微分方程式が得られる。

$$\frac{\partial P(y, t)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial y} \{a_1(y)P(y, t)\} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \{a_2(y)P(y, t)\}. \quad (21)$$

これをフォッカー・プランクの方程式 (Fokker-Planck equation) という。

### 例 3.2 (非対称ランダム・ウォーク)

出生死滅過程で死滅率が  $\mu_n = \alpha$ 、出生率が  $\lambda_n = \beta$  となるような特殊ケースを考える。  $\alpha \neq \beta$  である場合、これを非対称ランダム・ウォークという。マスター方程式は

$$\frac{dP_n(t)}{dt} = \alpha(P_{n+1}(t) - P_n(t)) + \beta(P_{n-1}(t) - P_n(t))$$

である。考えているシステムのサイズの大きさを表現する変数を  $N$  で表現し、  $\epsilon \equiv 1/N$  とする。このとき、新しい変数を

$$x \equiv \frac{n}{N}; \quad P(x, t) \equiv N \cdot P_n(t)$$

と定義する。また、定数  $A$  および  $B$  を

$$A \equiv \frac{\beta - \alpha}{N}; \quad B \equiv \frac{\beta + \alpha}{N^2}$$

が成立するように定義する。マスター方程式に  $P_n(t) = P(x, t)/N$  および

$$\frac{n+1}{N} = \frac{n}{N} + \frac{1}{N} = x + \frac{1}{N}$$

という関係を代入すると、マスター方程式は

$$\frac{\partial P(x, t)}{\partial t} = \alpha[P(x + \frac{1}{N}, t) - P(x, t)] + \beta[P(x - \frac{1}{N}, t) - P(x, t)]$$

と変形できる。確率変数  $P(x + \epsilon, t)$  を  $x$  の回りでテイラー級数展開すると

$$P(x \pm \epsilon, t) = P(x, t) \pm \epsilon \frac{\partial P(x, t)}{\partial x} + \frac{1}{2} \epsilon^2 \frac{\partial^2 P(x, t)}{\partial x^2} + O(\epsilon^2)$$

が得られる。これらの関係式を代入すると、以下のフォッカー・プランクの方程式

$$\frac{\partial P(x, t)}{\partial t} = -A \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{1}{2} B \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + O(\epsilon^2).$$

となる。

### 例 3.3 (出生死滅過程のフォッカー・プランクの方程式)

出生死滅過程のフォッカー・プランクの方程式を求めてみよう。表現を節約するために、この例では、  $p(n, t) = P_n(t)$  と表記する。マスター方程式は (10) より

$$\begin{aligned} \frac{\partial p(n, t)}{\partial t} = & [W(n + \Delta n; -\Delta n)p(n + \Delta n, t) - W(n; -\Delta n)p(n, t)] \\ & + [W(n - \Delta n; \Delta n)p(n - \Delta n, t) - W(n; \Delta n)p(n, t)], \quad n = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

である。ただし、  $\Delta n = 1$  である。右辺各項をテイラー級数展開をすると

$$\begin{aligned} W(n + \Delta n; -\Delta n)p(n + \Delta n, t) - W(n; -\Delta n)p(n, t) &= \Delta n \frac{\partial}{\partial n} [W(n; -\Delta n)p(n, t)] \\ &+ \frac{(\Delta n)^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial n^2} [W(n; -\Delta n)p(n, t)] + \dots, \\ W(n - \Delta n; \Delta n)p(n - \Delta n, t) - W(n; \Delta n)p(n, t) &= -\Delta n \frac{\partial}{\partial n} [W(n; \Delta n)p(n, t)] \\ &+ \frac{(\Delta n)^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial n^2} [W(n; \Delta n)p(n, t)] + \dots, \end{aligned}$$

である。これをマスター方程式に代入して、

$$\begin{aligned} \frac{\partial p(n, t)}{\partial t} = & -\Delta n \frac{\partial}{\partial n} \{ [W(n; \Delta n) - W(n; -\Delta n)] p(n, t) \} + \\ & \frac{1}{2} (\Delta n)^2 \frac{\partial^2}{\partial n^2} \{ [W(n; \Delta n) + W(n; -\Delta n)] p(n, t) \} \end{aligned} \quad (22)$$

が得られる。ここで、変数  $x$  を以下のように導入する。

$$x = \frac{n}{N}, \quad \Delta x = \frac{\Delta n}{N} = \frac{1}{N} \equiv \epsilon,$$

ただし、 $N$  はシステムの大きさを表現する数値である。よって、 $1 \geq x \geq -1$ 。また、確率分布関数も

$$P(x, t) = Np(n, t) = Np(Nx, t)$$

と変換する。

$$\int_{-1}^{+1} P(x, t) dx \approx \sum_{x=-1}^{x=+1} P(x, t) \frac{1}{N} = \sum_{n=-N}^{n=+N} p(n, t) = 1$$

が成立している。ドリフト係数を

$$K(x) = [W(xN; \Delta n) - W(xN; -\Delta n)]/N$$

で定義し、拡散係数を

$$Q(x) = [W(xN; \Delta n) + W(xN; -\Delta n)]/N$$

で定義する。これらの関係式を (22) に代入すると、1次元フォッカー・プランクの方程式

$$\frac{\partial P(x, t)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x} [K(x)P(x, t)] + \frac{\epsilon}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} [Q(x)P(x, t)] \quad (23)$$

が得られる<sup>11</sup>。

フォッカー・プランクの方程式は一般的な表現としては

$$\frac{\partial P(y, t)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial y} \{ A(y)P(y, t) \} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \{ B(y)P(y, t) \}$$

で与えられる。係数  $A(y)$  と  $B(y)$  は微分可能な実数値関数で、 $B(y) > 0$  という制約がつく。 $A$  をドリフト係数、 $B$  を拡散係数という。これらの係数は時間の関数であってもかまわない。確率束  $J(y, t)$

$$J(y, t) = A(y)P(y, t) - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial y} \{ B(y)P(y, t) \}$$

を用いると、フォッカー・プランクの方程式は

$$\frac{\partial P(y, t)}{\partial t} = -\frac{\partial J(y, t)}{\partial y}$$

と表現できる。フォッカー・プランクの方程式を解くためには、境界条件を定める必要がある。例えば、上記の出生・死滅過程の例では、状態空間  $N \geq n \geq -1$  をとるとき、境界での確率束  $J(y, t)$  の値はゼロである。つまり、 $J(-1, t) = J(1, t) = 0$  と定める。

フォッカー・プランクの方程式は非線形偏微分方程式なので、一般的には解析解を得ることは非常に難しい。この場合、マスター方程式の近似的な解法を考案せざるを得ない。次の節で、マスター方程式の近似解法の一つを説明する。

<sup>11</sup> より一般的なケースでのフォッカー・プランク方程式の導出については、Weidlich & Haag(1983) あるいは Weidlich(2000) を参照ください。

### 3.4 マスター方程式の近似解法：級数展開

考えているシステムのサイズを表現する変数を  $\Omega$  で表記し、状態変数を  $X$  で表記する。推移率がシステムのサイズに依存する場合も考慮して、状態  $X'$  から状態  $X$  への推移率を  $W_{\Omega}(X | X')$  と表記すると、マスター方程式は

$$\frac{dP(X, t)}{dt} = \int \{W_{\Omega}(X | X')P(X', t) - W_{\Omega}(X' | X)P(X, t)\}dX'$$

となる<sup>12</sup>。飛躍の大きさを  $r \equiv X - X'$  と表記すると、推移率は

$$W_{\Omega}(X | X') = W_{\Omega}(X'; X - X') = W_{\Omega}(X'; r)$$

と表現できる。ここで、新しい変数

$$x \equiv X/\Omega$$

を導入する。この新しい変数を用いて、推移率を

$$W_{\Omega}(X'; X - X') = \Phi\left(\frac{X'}{\Omega}; X - X'\right) = \Phi(x'; r)$$

と表現できる。ただし、 $x' = X'/\Omega$  である。同様に、

$$W_{\Omega}(X' | X) = W_{\Omega}(X; X' - X) = \Phi(x; -r)$$

と表現できる。状態変数の確率分布が一つのピークをもち、このピークが時間と共に変化すると想定しよう。そこで状態変数の確率分布がマクロ的に変動する部分(ピークの位置)とマクロ水準を中心とした分布に分けて表現できると仮定しよう。

$$X = \Omega\phi(t) + \Omega^{1/2}\xi \quad (24)$$

と仮定する。第1項がマクロ的な変動の部分を表し、第2項がマクロからの乖離の大きさ(いわゆる揺らぎと呼ばれる変動部分)を示す。マクロ的な変動はシステムの規模  $\Omega$  と同様の水準で変化するが、揺らぎの振幅はシステムの規模よりもかなり小さい、ここでは  $\Omega^{1/2}$  と同じ大きさになると想定している。

確率分布は状態変数の分解を用いると

$$P(X, t) = P(\Omega\phi(t) + \Omega^{1/2}\xi, t) = \Pi(\xi, t)$$

と表現される。ここで、

$$\begin{aligned} \frac{\partial^n \Pi}{\partial \xi^n} &= (\Omega^{1/2})^n \frac{\partial^n P}{\partial X^n}, \\ \frac{\partial \Pi}{\partial t} &= \frac{\partial P}{\partial t} + \Omega \frac{d\phi}{dt} \frac{\partial P}{\partial X} = \frac{\partial P}{\partial t} + \Omega^{1/2} \frac{d\phi}{dt} \frac{\partial \Pi}{\partial \xi} \end{aligned}$$

という関係式が成立する。これらの関係式を用いると、マスター方程式は

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Pi(\xi, t)}{\partial t} - \Omega^{1/2} \frac{d\phi}{dt} \frac{\partial \Pi}{\partial \xi} &= \int \Phi(\phi(t) + \Omega^{-1/2}(\xi - \Omega^{-1/2}r); r) \Pi(\xi - \Omega^{-1/2}r, t) dr \\ &\quad - \int \Phi(\phi(t) + \Omega^{-1/2}\xi; -r) dr \cdot \Pi(\xi, t) \end{aligned}$$

<sup>12</sup>この節での関係式の導出は van Kampen(1992) に多くを依存しているため、表記法も同じものを用いている。前節までの表記法で言うと、 $W_{\Omega}(X | X') \equiv w_{X', X}$  である。

と変形できる。  $\xi - \Omega^{-1/2}r$  の項を  $\xi$  の周りで展開して、マスター方程式右辺のテイラー級数展開を行うと、

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Pi(\xi, t)}{\partial t} - \Omega^{1/2} \frac{d\phi}{dt} \frac{\partial \Pi}{\partial \xi} &= -\Omega^{-1/2} \frac{\partial}{\partial \xi} \int r \Phi(\phi(t) + \Omega^{-1/2}\xi; r) dr \cdot \Pi(\xi, t) \\ &\quad + \frac{1}{2} \Omega^{-1} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \int r^2 \Phi(\phi(t) + \Omega^{-1/2}\xi; r) dr \cdot \Pi(\xi, t) \\ &\quad - \frac{1}{3!} \Omega^{-3/2} \frac{\partial^3}{\partial \xi^3} \int r^3 \Phi(\phi(t) + \Omega^{-1/2}\xi; r) dr \cdot \Pi(\xi, t) \\ &\quad + O(\Omega^{-2}) \end{aligned}$$

が得られる<sup>13</sup>。ここで、飛躍モーメントを

$$\alpha_\nu(x) = \int r^\nu \Phi(x; r) dr \quad (25)$$

とおく。また、

$$\Omega^{-1}t = \tau$$

を用いて時間変数を変換すると、

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Pi(\xi, \tau)}{\partial \tau} - \Omega^{1/2} \frac{d\phi}{d\tau} \frac{\partial \Pi}{\partial \xi} &= -\Omega^{1/2} \frac{\partial}{\partial \xi} \alpha_1(\phi(\tau) + \Omega^{-1/2}\xi) \cdot \Pi + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \alpha_2(\phi(\tau) + \Omega^{-1/2}\xi) \cdot \Pi \\ &\quad - \frac{1}{3!} \Omega^{-1/2} \frac{\partial^3}{\partial \xi^3} \alpha_3(\phi(\tau) + \Omega^{-1/2}\xi) \cdot \Pi + O(\Omega^{-1}) \end{aligned}$$

が得られる。次に、飛躍モーメント関数  $\alpha_\nu(x) = \alpha_\nu(\phi + \Omega^{-1}\xi)$  を  $\phi$  の回りでテイラー級数展開して、最終的に

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Pi(\xi, \tau)}{\partial \tau} - \Omega^{1/2} \frac{d\phi}{d\tau} \frac{\partial \Pi}{\partial \xi} &= -\Omega^{1/2} \alpha_1(\phi) \frac{\partial \Pi}{\partial \xi} - \alpha'_1(\phi) \frac{\partial}{\partial \xi} \xi \Pi - \frac{1}{2} \Omega^{-1/2} \alpha''_1(\phi) \frac{\partial}{\partial \xi} \xi^2 \Pi + \frac{1}{2} \alpha_2(\phi) \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \xi^2} \\ &\quad + \frac{1}{2} \Omega^{-1/2} \alpha'_2(\phi) \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \xi \Pi - \frac{1}{3!} \Omega^{-1/2} \alpha_3(\phi) \frac{\partial^3 \Pi}{\partial \xi^3} \end{aligned} \quad (26)$$

を得る。

マクロ変数  $\phi$  を

$$\frac{d\phi}{d\tau} = \alpha_1(\phi) \quad (27)$$

を満たすように選べば、 $\partial \Pi / \partial \xi$  の項が消去できる。初期値として

$$\phi(0) = X_0 / \Omega = x_0$$

とおく。式 (27) はシステムのマクロ変数の変動を記述する微分方程式と理解されている。

次に、マスター方程式を展開した式 (26) の残りの項を考える。  $\Omega^0$  の項だけをまとめると、

$$\frac{\partial \Pi(\xi, \tau)}{\partial \tau} = -\alpha'_1(\phi) \frac{\partial}{\partial \xi} \xi \Pi + \frac{1}{2} \alpha_2(\phi) \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \xi^2} \quad (28)$$

が得られる。これは線形フォッカー・プランクの方程式に他ならない。この偏微分方程式の解がガウス過程 (標本関数の確率分布が正規分布をする確率過程) になることが知られている。

<sup>13</sup>より一般的に、  $W_\Omega(X' | X) = f(\Omega)\Phi(x; -r)$  と表現できるときの関係式は、van Kampen, chapter X を参照ください。

フォッカー・プランク方程式 (28) から、揺らぎの平均値と分散の動的挙動を以下のように求めることができる。

$$\frac{d}{d\tau}\langle\xi\rangle = \alpha_1'(\phi)\langle\xi\rangle, \quad (29)$$

$$\frac{d}{d\tau}\text{Var}\xi = 2\alpha_1'(\phi)\text{Var}\xi + \alpha_2(\phi). \quad (30)$$

状態変数の初期値を  $\phi_0 = x_0$  と仮定したから、

$$\langle\xi\rangle_0 = \langle\xi^2\rangle_0 = \text{Var}\xi_0 = 0 \quad (31)$$

となるはずである。

以上のことから、マスター方程式の解は以下の手順に従って求められることになる。

1. マクロ変数の微分方程式 (27) から、その解  $\phi(\tau|x_0)$  を求める。
2. この解  $\phi(\tau|x_0)$  を式 (29) と式 (30) に代入して、揺らぎの平均値  $\langle\xi\rangle$  と分散  $\text{Var}\xi$  を求める。
3. これらの値を用いて、状態変数  $X$  の平均値と分散を求める。状態変数は

$$\langle X \rangle_\tau = \Omega\phi(\tau|x_0) + \Omega^{1/2}\langle\xi\rangle_\tau, \quad (32)$$

$$\text{Var}X_\tau = \Omega\text{Var}\xi_\tau \quad (33)$$

で与えられる平均値と分散を持つガウス過程となっている。

平均値の動的挙動を支配する式 (29) とその初期値の設定 (31) から、常に  $\langle\xi\rangle = 0$  となることが分かる。従って、状態変数  $x = X/\Omega$  の平均値の動的挙動はマクロ変数  $\phi$  の挙動を支配する微分方程式と同じ

$$\frac{d}{d\tau}\langle x \rangle = \alpha_1(\langle x \rangle) + O(\Omega^{-1})$$

によって支配されている。

上記の手続きは、確率変数  $P(X, t)$  が一つの頂点を持ち、その分布の幅が  $\sqrt{\Omega}$  の大きさと同程度となることを仮定している。このことは、微分方程式 (27) の均衡点が漸近的に安定であることを要求する。もし、微分方程式 (27) の均衡点が不安定であれば、上記の手法は使用できない。

ここで、マクロ変数を支配する微分方程式 (27) が漸近的に安定でないケースを考えよう。例えば、

$$\alpha_1(\phi) = 0$$

であるケースを取り上げよう。このとき、 $\phi(\tau) = \phi(0)$  となり、確率分布の分散は (27) 式から、

$$\langle\xi^2\rangle = \alpha_2(\phi)\tau$$

である。つまり、分散は時間と共に線形に増大し続ける。時間の経過が  $\tau > \Omega/\alpha_2(\phi)$  を超えれば、振幅の大きさはシステムのサイズと同程度となる。従って、上記の  $\sqrt{\Omega}$  を単位とした級数展開の方法は有効性を失う。この場合には、確率分布の幅が  $\Omega$  になるような級数展開をする必要が生じる。集約変数を

$$x = \frac{X}{\Omega}$$

で定義して、

$$\frac{X'}{\Omega} = \frac{X - r}{\Omega} = x - \frac{r}{\Omega}$$

という関係を用いる。また、関係

$$W_{\Omega}(X; X' - X) = \Phi(x; -r); \quad W_{\Omega}(X'; X - X') = \Phi(x - \frac{r}{\Omega}; r)$$

が成立する。これらの関係式を用いてマスター方程式を変形すると、

$$\frac{\partial P(x, t)}{\partial t} = \int \Phi(x - r/\Omega; t) P(x - r/\Omega; t) dr - \int \Phi(x; t) P(x; t) dr$$

となる。テイラー級数展開を行うと、

$$\frac{\partial P(x, t)}{\partial t} = \Omega^2 \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \alpha_2(x) P(x, t) - \Omega^3 \frac{1}{3!} \frac{\partial^3}{\partial x^3} \alpha_3(x) P(x, t) + O(\Omega^{-4})$$

が得られる。  $P(x, t)$  が尖った単峰分布ではないので、飛躍モーメント関数  $\alpha$  をあるマクロ変数 (平均値)  $\phi$  の回りで級数展開をすることができない。  $\alpha$  は非線形関数のままで取り扱う必要がある。  $\tau = \Omega^{-2}t$  と時間変数を変換し、第2次の項までの近似を採用すれば、

$$\frac{\partial P(x, \tau)}{\partial \tau} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \alpha_2(x) P(x, t) \quad (34)$$

という非線形フォッカー・プランクの方程式が得られる。マクロ変数を支配する微分方程式 (27) が不安定なケースについてはここでは触れないことにする。

### 例 3.4 (ロジステック過程)

Karlin and Taylor(1975) が提案したロジステック過程を考える。この飛躍過程での推移率は

$$w_{n,n+1} = \lambda n(N_2 - n), \quad w_{n,n-1} = \mu n(n - N_1), \quad N_1 < N_2$$

と与えられる。ここでは、  $N_1 = 1, N_2 = N$  として、状態空間が  $\mathcal{S} = \{1, 2, \dots, N\}$  であるケースを考える。Aoki(2002) に従って、推移率を

$$w_{n,n+1} = \lambda \frac{n}{N} \frac{N-n}{N}, \quad w_{n,n-1} = \mu \frac{n}{N} \frac{n-1}{N}$$

とする。このとき、マスター方程式は

$$\frac{dP_n(t)}{dt} = w_{n-1,n} P_{n-1}(t) + w_{n+1,n} P_{n+1}(t) - (w_{n,n+1} + w_{n,n-1}) P_n(t), \quad n = 1, 2, \dots$$

である。この例でのシステムのサイズは  $\Omega = N$ 、状態変数は  $X = n$  である。そこで、

$$x = \frac{n}{N}, \quad x = \phi + \frac{1}{\sqrt{N}} \xi$$

と変数変換を行い、この確率変数の分解に従い確率密度関数を

$$P_n(t) = P(N\phi(t) + N^{1/2}\xi, t) = \Pi(\xi, t)$$

と変換する。飛躍モーメント関数  $\alpha_1(x)$  および  $\alpha_2(x)$  を計算する。

$$\begin{aligned} \alpha_1(x) &= \int_r r \Phi(x; r) dr = w_{n,n+1} - w_{n,n-1} = \lambda x(1-x) - \mu x(x-1/N), \\ \alpha_2(x) &= \int_r r^2 \Phi(x; r) dr = w_{n,n+1} + (-1)^2 w_{n,n-1} = \lambda x(1-x) + \mu x(x-1/N). \end{aligned}$$

マクロ変数  $\phi$  の動学方程式は

$$\frac{d\phi}{dt} = \alpha_1(\phi) = \lambda\phi(1 - \phi) - \mu\phi(\phi - 1/N),$$

となる。  $N$  が非常に大きいとすると、  $1/N \approx 0$  とおける。 従って、近似的には、

$$\frac{d\phi}{dt} = \alpha_1(\phi) = \lambda\phi(1 - \phi) - \mu\phi^2, \quad (35)$$

が成立する。 均衡点が漸近安定であるためには、  $\alpha'_1(\phi) = \lambda(1 - 2\phi) - 2\mu\phi < 0$  が満たされなければならない。 この微分方程式の均衡点は

$$\phi = 0, \phi = \frac{\lambda}{\lambda + \mu}$$

の二つである。  $\phi = 0$  は漸近安定ではない。  $\phi = \lambda/(\lambda + \mu)$  は漸近安定な均衡点となっている。 微分方程式 (35) の解は

$$\phi(t) = \frac{\lambda}{\lambda + \mu - ce^{-\beta t}}$$

となる。 ただし、  $c$  は初期値から求められる積分定数で  $c = 1 - \lambda/\{\phi(0)(\lambda + \mu)\}$  であり、  $\beta = (\lambda + \mu)^2/\lambda$  である。 この解はロジステック曲線と呼ばれている。 解は均衡点  $\lambda/(\lambda + \mu)$  に漸近的に収束する。 マクロ変数の回りの揺らぎの確率分布の平均値はゼロで、分散は

$$\text{Var}\xi = -\frac{\alpha_2(\phi)}{2\alpha'_1(\phi)} = \frac{1}{2} \frac{\lambda\phi(1 - \phi) + \mu\phi^2}{2\mu\phi - \lambda(1 - 2\phi)}$$

で与えられる。 均衡点  $\phi = \lambda/(\lambda + \mu)$  では分散の値  $\text{Var}\xi$  は確かに正である。

## 4 経済現象の確率力学系モデル

### 4.1 二者択一意思決定のモデル

経済的な意思決定において、経済主体が二つの選択肢のうちのどちらかを選択することを迫られる事例は多く見られる。 とりわけ、新製品開発などにおいて多く観察される事例である。 経済文献でよく引き合いに出される事例は、ビデオ・テープの録音・再生方式を巡って実際に起こった VHS 方式とベータ・マックス方式のどちらを選択するかという企業間競争である。 現代では、ブルー・レイ・デスク方式と HD-DVD 方式のどちらを選択するかを巡ったソニー陣営対東芝陣営間の競争が続いている。 こうした商品開発を巡る企業間競争と市場変動を分析するためには、二者択一意思決定モデルを用いることが有効である。 あるいは、新製品半導体チップの生産設備を拡張すべきかどうか、新規市場に参入すべきかどうか、国内の生産工場を海外に移転すべきかどうか、等々のように、多くの領域で二者択一形式の意思決定問題は観察される事例である。

二つの選択肢のうち第 1 の選択肢を選択した企業グループの企業数を  $n$ 、第 2 の選択肢を選択した企業数を  $N - n$  とする。 ここでは、  $N$  は総企業数で、一定であると仮定する。 つまり、この産業への新規参入がなく、産業からの退出もないとする。 議論を単純化するために、選択に関する意思決定に対しては態度保留できないと仮定する。 現実には、例えば、R&D 段階での意思決定に見られるように、両方の選択肢に対応可能なような意思決定が行われているが、ここでは、すでに選択した選択肢に対応する製品が生産されており、どちらの製品を選択するかという二者択一問題に直面している状態を想定する<sup>14</sup>。

<sup>14</sup> どの製品を生産すべきかを選択するに際しては、R&D 段階での意思決定段階を含めて分析する必要があるが、モデルが非常に煩雑になってしまう。 ここではこのような可能性については触れない。

各企業は状況に応じて選択肢を変化させることができる。例えば、第2の選択肢を選択しているグループに属するある企業が、第1の選択肢の方が将来性が有望だと判断するときには、第1の選択肢の方へ乗り換えることができる。反対に、第1のグループに属していた企業が第2グループに移動することも起こりうる。グループ間移動に伴うコストは発生しないとする。出生・死滅型飛躍過程を用いて分析するために、限界推移率を以下のように仮定する。

$$w_{n,n+1} = N\left(1 - \frac{n}{N}\right)\eta_1\left(\frac{n}{N}\right), \quad (36)$$

$$w_{n,n-1} = N\left(\frac{n}{N}\right)\eta_2\left(\frac{n}{N}\right). \quad (37)$$

ただし、

$$\eta_1\left(\frac{n}{N}\right) + \eta_2\left(\frac{n}{N}\right) = 1$$

と仮定する。推移率が比率  $n/N$  に依存するのは、各グループの占める市場占有率が選択肢の優劣の確率を左右すると想定するからである。経済主体間の選択の外部性は関数形  $\eta_1(n/N)$  によって表現されていると理解する<sup>15</sup>。

この推移率の下でのマスター方程式は、

$$\frac{\partial}{\partial n}P(n, t) = w_{n+1,n}P(n+1, t) + w_{n-1,n}P(n-1, t) - w_{n,n-1}P(n, t) - w_{n,n+1}P(n, t),$$

となる。前節で説明したマクロ変数の動学方程式を導出しよう。ここで、

$$x = \frac{n}{N}, \quad \Delta x = \frac{\Delta n}{N} = \frac{1}{N} \equiv \epsilon,$$

と新しい変数を定義し、

$$x = \phi(t) + \frac{1}{\sqrt{N}}\xi \quad (n = N\phi + \sqrt{N}\xi),$$

とおく。さらに、 $\Pi(\xi, t) = P(N\phi + \sqrt{N}\xi, t)$  とおく。  $\tau = t/N$  と時間変数を変換すると、マスター方程式から推移率にかかっているシステムのサイズ  $N$  がキャンセルされて消去できる。

マクロ変数  $\phi$  の動学方程式を求めるために、飛躍モーメント関数  $\alpha_1(x)$  を計算する。

$$\alpha_1(x) = \int_r r\Phi(x; r)dr = w_{n,n+1} - w_{n,n-1} = (1-x)\eta_1(x) - x\eta_2(x)$$

ここで、時間変数の変換に伴って推移率に積の形で入っている  $N$  は消去されている。従って、マクロ変数  $\phi$  は微分方程式

$$\frac{d\phi(\tau)}{d\tau} = \alpha_1(\phi) = (1-\phi)\eta_1(\phi) - \phi\eta_2(\phi) \quad (38)$$

に従うことが分かる。この微分方程式の均衡点は

$$\frac{\eta_1(\phi)}{\eta_2(\phi)} = \frac{\phi}{1-\phi} \quad (39)$$

を満たす  $\phi$  で与えられる。これを解くと

$$\phi = \eta_1(\phi)$$

となる。この均衡点が漸近安定であるためには、

$$\alpha_1'(\phi) = -1 + \eta_1'(\phi) < 0$$

<sup>15</sup>このような推移率を用いた分析は、Aoki(1996, 2002)に多くを負う。ここでの定式化は、Arthur(1988)によるモデルの一般化と理解することもできる。Arthur(1988)では、 $\eta_1(n/N)$ がグループ1の市場占有率  $n/N$ の増加関数と仮定されている。

が満たされなければいけない。すなわち、推移率に関して、 $\eta_1'(x) < 1$  を必要とする。言い換えると、経済主体間の外部性が市場占有率の変化にそれほど敏感に反応しないという条件が必要となる。Aoki(1996) および Aoki and Yoshikawa(2007) では、漸近安定性を保証するための条件として、 $g'(x) < 0$  を仮定しているが、この条件は十分条件の一つで、制約が強い条件である。 $\eta_1'(x) < 1$  を満たすために、 $g'(x) > 0$  を排除する必要はない。経済学的には、むしろ、 $g'(x) > 0$  のケースの方が一般的である。

ここで、グループ 1 の企業の利潤とグループ 2 の企業の利潤の差を  $g(x)$  と表記する。グループ 1 の利潤上での優位性  $g(x)$  はグループ 1 の市場占有率  $x$  に依存していると仮定している。この関係がいかなる経済環境の下で成立するのかわかるについてはここでは論じない。グループ 2 からグループ 1 への推移率はこの利潤格差  $g$  の増加関数であると想定しよう。統計力学での常套手段を用いて

$$2\beta g(x) = \ln \frac{\eta_1(x)}{\eta_2(x)},$$

と定義できるとする。パラメータ  $\beta$  は非負であると仮定する。 $\eta_2 = 1 - \eta_1$  を用いて、 $\eta_1$  に対してこの関係式を解くと、

$$\eta_1(x) = \frac{e^{\beta g(x)}}{e^{\beta g(x)} + e^{-\beta g(x)}} \quad (40)$$

が得られる。これは前節で登場した Gibbs 分布に他ならない。 $\beta$  はシステムに存在する情報の不確かさを表現している。この仮定の下で、平均値  $\phi$  の均衡 (臨界) 値は条件式

$$\ln \frac{\phi}{1-\phi} = 2\beta g(\phi)$$

を満たす  $\phi_c$  として与えられる。この均衡値がただ一つに定まるかどうかは、関数  $g(x)$  の形状およびパラメータ  $\beta$  の値の大きさに依存する。 $g(x)$  の形状によっては、均衡値が複数存在するケースも生じる。例 2.5 で導入したポテンシャル関数  $U(x)$

$$U(x) = -\frac{1}{\beta} H(x) - 2 \int_0^x g(x) dx$$

を用いても議論できる。平均値  $\phi$  の変動を支配する微分方程式 (38) の均衡点 (39) はポテンシャル関数  $U(x)$  を最小にする点である。すなわち、

$$\frac{dU(x)}{dx} = \frac{1}{\beta} \ln \frac{\phi}{1-\phi} - 2g(x) = 0$$

を満たす  $\phi$  が均衡点である。この均衡点がポテンシャルの最小点になっているための条件は

$$\frac{1}{\beta} \frac{1}{\phi(1-\phi)} - 2g'(x) > 0$$

で与えられる。これは均衡点の漸近安定のための条件と一致する。

揺らぎ  $\xi$  の分布関数  $\Pi$  は以下のフォッカー・プランクの方程式

$$\frac{\partial \Pi(\xi, \tau)}{\partial \tau} = -\alpha_1'(\phi) \frac{\partial}{\partial \xi} \xi \Pi + \frac{1}{2} \alpha_2(\phi) \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \xi^2}$$

によって与えられる。飛躍モーメント関数  $\alpha_2(x)$  は

$$\alpha_2(x) = \int_r r^2 \Phi(x; r) dr = 1^2 w_{n,n+1} + (-1)^2 w_{n,n-1} = (1-x)\eta_1(x) + x\eta_2(x)$$

である。この偏微分方程式から揺らぎの平均値と分散の動的挙動は前節の (29) 式と (30) 式

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\tau}\langle\xi\rangle &= \alpha'_1(\phi)\langle\xi\rangle, \\ \frac{d}{d\tau}\text{Var}\xi &= 2\alpha'_1(\phi)\text{Var}\xi + \alpha_2(\phi)\end{aligned}$$

に従う。初期値の設定から揺らぎの平均値はゼロである。分散の定常状態での大きさは

$$\text{Var}\xi = -\frac{\alpha_2(\phi)}{2\alpha'_1(\phi)} = \frac{\phi + (1-2\phi)\eta_1(\phi)}{2(1-\eta'_1(\phi))}$$

で与えられる。マクロ変数を支配する微分方程式の均衡点が漸近安定であると仮定すると、 $\phi + (1-2\phi)\eta_1(\phi) > 0$  であれば、分散の値は正值となるので、近似解法による手続きの有効性は保証される。この十分条件の一つは  $\phi < 1/2$  である。

均衡点のユニーク性について考察しよう。平均値  $\phi$  の動的変動を支配する微分方程式は単純化すると

$$\frac{d\phi}{d\tau} = \eta_1(\phi) - \phi$$

となる。ここで、 $\eta_1$  は式 (40) で表現されている。ここでは、均衡点は存在すると仮定する。関数  $\eta_1(\phi)$  の形状、つまり関数  $g(\phi)$  の形状に依存して均衡点の個数が決定する。 $\eta_1(\phi)$  のグラフが 45 度線と交差する回数が均衡点の個数となる。均衡点での  $\eta_1(\phi)$  のグラフの傾きが 1 未満であれば、均衡点は漸近安定である。 $\eta_1(\phi)$  のグラフが単調減少、もしくは単調増加となっているケースでは、明らかに均衡点はユニークに定まる。 $\eta_1(\phi)$  のグラフが 45 度線と複数回交差する場合、そのうちの一つ以上は必ず不安定な均衡点であり、隣接する各均衡点は交互に安定、不安定となっている。図 1 は、 $\beta = 1, g(x) = -1 + 1.5x$  のケースを描いている。この場合、均衡点はユニークに定まることが確認できる。

## 4.2 経済政策の効果と不確実性

前節で導入した二者択一意思決定のモデルは、多くの経済現象をモデル化するときに応用可能である。ここでは、マクロ経済政策の効果进行分析を試みる。多くの場合、各企業は投資を拡大すべきか、縮小すべきかという意思決定に直面する、あるいは生産量を拡大するか、縮小するかという二者択一に直面する。投資を拡大する企業が多ければ多いほど、総需要は拡大し、GDP は増加する。反対に投資を縮小する企業数が多くなればなるほど、総需要は縮小し、GDP は減少する。マクロ経済に存在する企業の総数を  $N$  とする。投資を拡大した企業数が  $n$  であるときの総需要の水準を  $Y(n, N)$  とする。総生産量は総需要に反応して決定すると仮定する。投資を拡大した企業数が増えれば増えるほど、GDP は増加するので、

$$\frac{\partial Y(n, N)}{\partial n} > 0$$

が成り立つ。新規企業の参入を無視して、総企業数は一定であると仮定する。

各企業は高水準の投資を行うか、低水準の投資を実行するかという二者択一の選択肢を持っていると仮定する。従って、各企業は現在の投資水準を維持するか、変化させるかの選択肢を持っている。企業の投資選択のダイナミクスを飛躍型マルコフ過程で表現する。高水準投資を行うグループ 1 に属する企業数を  $n$  とする。低水準の投資を行うグループ 2 に属する企業数は  $N - n$  である。グループ 2 に属する企業が投資水準を変化させて、高水準の投資に切り替える限界推移率を  $w_{n, n+1}$  と表記し、反対にグループ 1 に属す

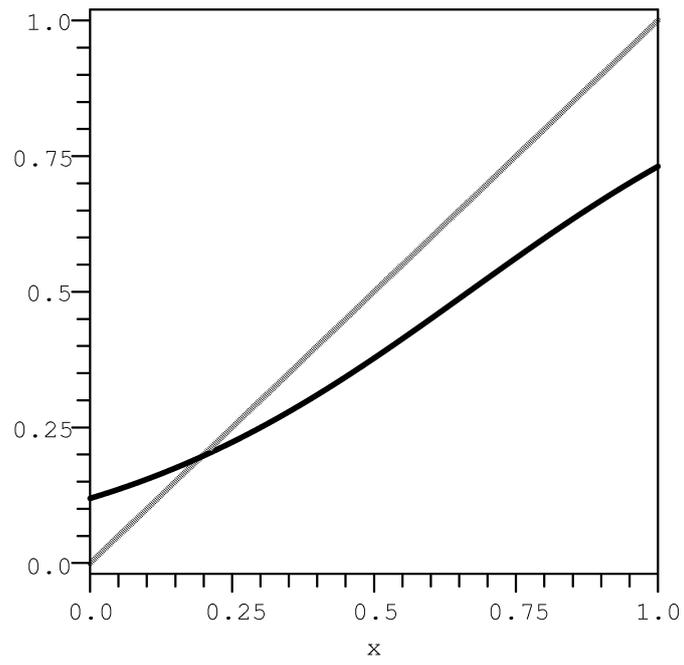


図 1: ユニークな均衡点:  $g(x) = -1 + 1.5x$

る企業が低水準の投資に切り替える限界推移率を  $w_{n,n-1}$  と表現する。これらの限界推移率は前節での仮定と同一の仮定を用いて、

$$w_{n,n+1} = N(1 - \frac{n}{N})\eta_1(\frac{n}{N}), \quad w_{n,n-1} = N(\frac{n}{N})\eta_2(\frac{n}{N})$$

とおく。  $x = n/N$  とおく。  $x$  は高水準投資戦略を持つ企業の市場占有率である。各企業の投資戦略の切り替えが Gibbs 分布に従うと仮定すると、

$$\eta_1(x) = \frac{e^{\beta g(x)}}{e^{\beta g(x)} + e^{-\beta g(x)}}$$

となる。関数  $g(x)$  は各企業が低水準投資戦略から高水準投資戦略に切り替えることの優位性を示す指標と理解される。  $g(x)$  の値が大きくなるほど、  $\eta_1(x)$  の値は大きくなる。関数  $g(x)$  は企業のミクロ経済学的な分析から導出されるべきものであるが、ミクロ経済学的な詳細についてはここでは探求しない。すでに述べたとおり、関数  $g(x)$  のグラフの形状は均衡点の性質に重要な影響を及ぼす。確率変数  $x(t)$  の平均値を  $\phi(t)$ 、平均値からの揺らぎの大きさを  $\xi(t)$  と表現する。前節での議論から、平均値は微分方程式

$$\frac{d\phi}{d\tau} = \eta_1(\phi(\tau)) - \phi(\tau)$$

に従い、揺らぎはフォッカー・プランク方程式

$$\frac{\partial \Pi(\xi, \tau)}{\partial \tau} = -\alpha'_1(\phi) \frac{\partial}{\partial \xi} \xi \Pi + \frac{1}{2} \alpha_2(\phi) \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \xi^2}$$

に従う。平均値の均衡点は

$$\eta_1(\phi) = \phi$$

を満たす  $\phi_c$  である。

従って、マクロ経済の GDP は

$$Y(\tau) \equiv Y(\phi(\tau), N)$$

を平均値として、揺らぎ  $\xi$  で表現される変動幅を持つ確率過程となる。マクロ経済の均衡点は

$$Y^* \equiv Y(\phi_c, N)$$

を平均値として、定常分散  $\text{Var}\xi$  をもつ確率分布として表現される。マクロ均衡点は、確定系のように座標上の点として表現されるのではなく、平均値  $Y^*$  をもつ確率分布として表現される<sup>16</sup>。

経済政策の効果を分析するために、マクロ均衡点はユニークに定まっているとする。マクロ経済政策を代理するパラメータを  $\gamma$  で表現し、拡張的な財政金融政策の発動はこの値を大きくするように結果とする。例えば、拡張的な財政政策あるいは金融政策は投資を刺激し、各企業の投資行動に影響を与える。各企業がこのような政策の発動を認知したとき、各企業の投資戦略において低水準投資から高水準投資への推移確率  $\eta_1(x)$  が上昇すると想定できる。言い換えると、高水準投資戦略の優位性  $g(x)$  に影響を与える。そこで、

$$g(x) = g(x, \gamma), \quad \partial g(x, \gamma) / \partial \gamma > 0$$

と表現する。

$$\frac{\partial \eta_1(x)}{\partial \gamma} = \frac{2\beta}{(e^{\beta g(x)} + e^{-\beta g(x)})^2} \frac{\partial g(x, \gamma)}{\partial \gamma} > 0$$

<sup>16</sup> マクロ均衡点を確率分布として表現することの優位性は、Aoki and Yoshikawa(2007) で力説されている。

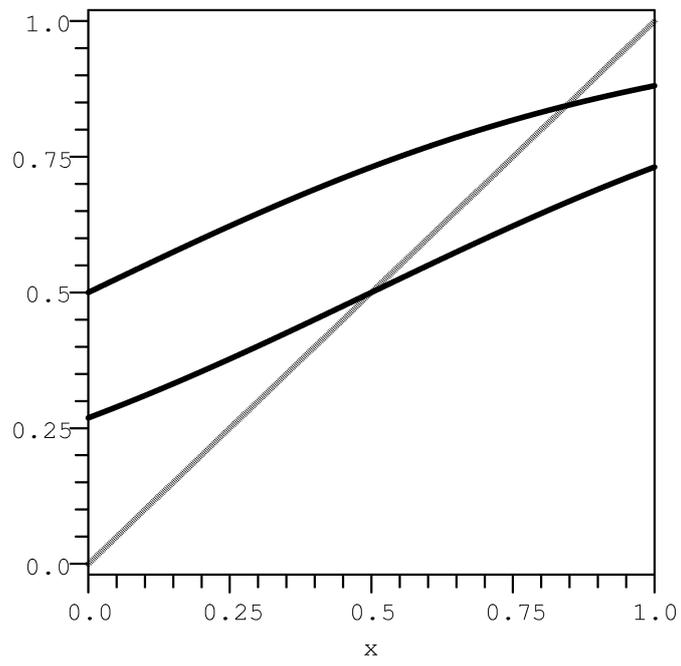


図 2: 政策の効果: $g(x) = \gamma + x$

だから、拡張的財政金融政策の発動は  $\eta_1(x)$  のグラフを上方へ移動させる。この結果、図 2 に描かれているように、平均値  $\phi$  の均衡点は右上へ移動する。古い均衡値から新しい均衡値への変化の大きさを  $\Delta\phi$  とすると

$$\frac{\partial\eta_1(\phi_c)}{\partial\gamma}\Delta\gamma - \Delta\phi = 0$$

が成立する。よって、

$$\Delta\phi = \frac{2\beta}{(e^{\beta g(x)} + e^{-\beta g(x)})^2} \frac{\partial g(x, \gamma)}{\partial\gamma} \Delta\gamma > 0$$

である。GDP の変化の大きさは

$$Y(\phi_c + \Delta\phi, N) - Y(\phi_c, N) > 0$$

と表現される。明らかに、拡張的財政金融政策は GDP の平均値を増大させる。GDP の変化の大きさは、 $\partial g(x, \gamma)/\partial\gamma$  の大きさのみならず、パラメータ  $\beta$  の大きさにも依存している。前者はマクロ政策が各企業の戦略にどの程度の大きさの影響を与えるかを表現する指数である。後者は、システムに存在する不確実性を表している。このことは、政策の効果はシステムに存在する不確実性の程度によって大きな影響を受けることを意味する。

不確実性の存在が経済政策の効果にどのように関係するのかについて考察してみよう。この不確実性は、前節で説明したとおり、高水準の投資戦略の優位性に関する不確実性である。この不確実性が大きくなるほど、高水準の投資戦略の優位性に関する見込みが少なくなる。不確実性が大きくなることは  $\beta$  の値が小さくなり、極端な場合は、ゼロとなる。  $\beta \approx 0$  となる時、明らかに、

$$\Delta\phi \approx 0; Y(\phi_c + \Delta\phi, N) - Y(\phi_c, N) \approx 0$$

である。つまり、経済政策は無効である。

### 4.3 複数均衡点を持つ経済現象の例

前節の経済政策のモデルでも複数均衡点が起こりうることは知られているが<sup>17</sup>、ここでは、異なる経済モデルでの複数均衡点の存在問題を議論する。モデル化する経済現象はマクロ経済ではなく、ある製品の市場均衡における現象である。ある製品市場では 2 種類のブランドの製品が販売されている。これをブランド A とブランド B と呼ぶことにする。消費者はこれらの 2 種類のどちらかのブランドの製品を購入する。例えば、携帯音楽プレーヤーとして、アップル社の ipod とソニー社の walkman という 2 種類の製品が販売されているような状況を考えている。消費者はブランド A を購入するか、ブランド B の製品を購入するかの二者択一意思決定問題に直面している。消費者の総数は  $2N$  とし、ブランド A を購入する人々の総数を  $N+n$  とする。ブランド B を購入する消費者数は  $N-n$  である。ブランド A を購入する消費者数が飛躍型マルコフ過程に従うと想定する。4.1 節で導入した二者択一意思決定のモデルを利用できる。ブランド B を購入していた消費者がブランド A の製品を購入することになる限界推移率を  $w_{n, n+1}$ 、ブランド A を購入していた消費者がブランド B を購入することになる限界推移率を  $w_{n, n-1}$  と表現する。これらの限界推移率を

$$w_{n, n+1} = (N-n)\eta_1\left(\frac{n}{N}\right),$$

$$w_{n, n-1} = (N+n)\eta_2\left(\frac{n}{N}\right)$$

<sup>17</sup>Aoki(1996,5.10) または Aoki and Yoshikawa(2007,4.2) で例示されている。

とする。各ブランドを購入している消費者の割合は、消費者が購入先ブランドを変更する動機に大きな影響を与えるので、 $\eta_1$  および  $\eta_2$  はブランド A の市場占有率の関数となっている。ここで、

$$\eta_1\left(\frac{n}{N}\right) = \frac{e^{\delta+\rho n/N}}{e^{\delta+\rho n/N} + e^{-(\delta+\rho n/N)}},$$

$$\eta_2\left(\frac{n}{N}\right) = \frac{e^{-(\delta+\rho n/N)}}{e^{\delta+\rho n/N} + e^{-(\delta+\rho n/N)}}$$

と仮定する。ブランド A を購入している消費者個人がブランド B の購入に切り換える推移率  $w_{n,n-1}$  (および  $w_{n,n+1}$ ) は、ブランド A の市場占有率として  $n/N$  を採用して定式化しているが、市場占有率として  $(N+n)/N$  を用いて定式化しても結果は同じである。  $\delta$  は人々の選好を表現する指標であり、この値が大きければ大きいほど、市場においてブランド A の購入がより強く選好されることになる。  $\rho$  は同調化の程度を表現する指標である。市場でより多くの人々がブランド A を買い求めるのであれば、他の人々もこれに同調してブランド A の製品を購入する傾向が強くなるという行動を記述する。これは、いわゆる、ネットワーク外部性のような外部効果の程度を表現すると理解できる。  $\rho$  の値が大きくなればなるほど、この同調化の動きが強められる<sup>18</sup>。

ここで、新しい変数

$$x = \frac{n}{N}, \quad \Delta x = \frac{\Delta n}{N} = \frac{1}{N} \equiv \epsilon,$$

を定義する。  $1 \geq x \geq -1$  である。

$$x = \phi(t) + \frac{1}{\sqrt{N}}\xi \quad (n = N\phi + \sqrt{N}\xi),$$

とおく。さらに、  $\Pi(\xi, t) = P(N\phi + \sqrt{N}\xi)$  とおく。  $\tau = t/N$  と時間変数を変換すると、マスター方程式から推移率にかかっている  $N$  がキャンセルされて消去できる。  $\phi(\tau)$  は微分方程式

$$\frac{d\phi(\tau)}{d\tau} = \alpha_1(\phi)$$

に従う。飛躍モーメント  $\alpha_1$  は

$$\alpha_1(x) = \int_r r\Phi(x; r)dr = w_{n,n+1} - w_{n,n-1} = (1-x)\eta_1(x) - (1+x)\eta_2(x)$$

と計算される。従って、

$$\frac{d\phi(\tau)}{d\tau} = (1-\phi)\eta_1(\phi) - (1+\phi)\eta_2(\phi) \quad (41)$$

が成立する。均衡点は

$$(1-\phi)\eta_1(\phi) = (1+\phi)\eta_2(\phi)$$

を満たす  $\phi$  として与えられる。これを変形すると

$$\phi = \tanh(\delta + \rho\phi) \quad (42)$$

となる。

ポテンシャル関数を用いて均衡点を求める方法についても説明する。定常分布  $P(n)$  はマスター方程式の定常解であるから、漸化式

$$P(n)w_{n,n+1} = P(n+1)w_{n+1,n}$$

<sup>18</sup>ここで展開するモデルは、Weidlich and Haag(1983) のモデルを一般化したものになっている。

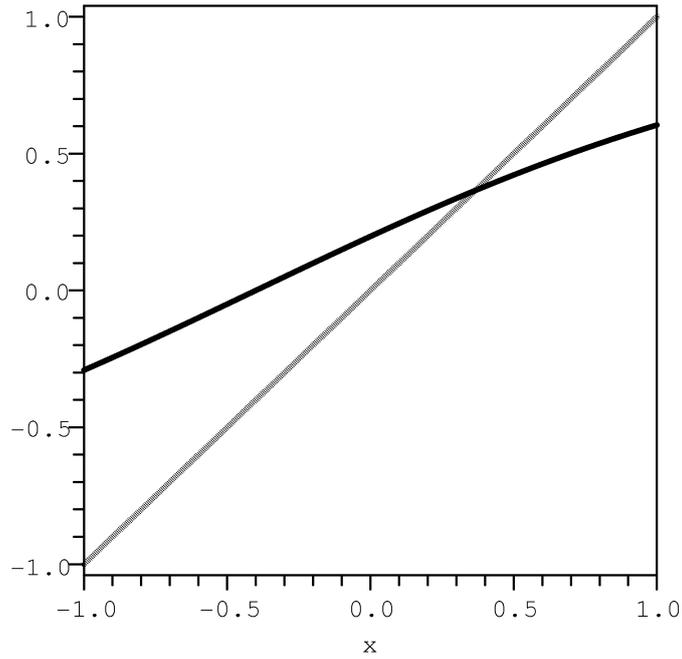


図 3: ユニークな均衡点 :  $\delta = 0.2, \rho = 0.5$

を満たさなければならない. この漸化式を解くと、

$$P(n) = P(0) \frac{(N!)^2}{(2N)!} C_{2N, N+n} \prod_{k=1}^n \frac{\eta_1(\frac{k-1}{N})}{\eta_2(\frac{k}{N})}, n = 1, 2, \dots$$

が得られる. ポテンシャル関数  $U(x)$  を

$$U(x) = -2\delta x - \rho x^2 + [(1+x) \ln((1+x) + (1-x) \ln(1-x))]$$

とおくと、

$$P(xN) = c_0 \exp\{-NU(x)\}$$

と表現される. ここで、 $c_0$  は  $P(n)$  が分布関数になるように定められる ( $N$  に依存する) 定数である. ポテンシャルを最大または最小にする  $x$  は、(42) 式で与えられる平均値の均衡点  $\phi$  と一致する. ポテンシャル関数を最小にする均衡点は漸近安定な均衡点であるが、最大にする均衡点是不安定な均衡点である.

均衡点の性質について考察するために、方程式 (42) の解を調べよう. 明らか、同調化のパラメータ値が  $0 < \rho < 1$  の範囲にあるとき、選好パラメータ  $\delta$  の値がどうであろうと、解の数は 1 である. つまり、均衡点はユニークに定まる. ところが、 $\rho$  の値が 1 以上となるとき、均衡点は複数個存在する可能性が生じる.  $\delta_0$  が

$$\cosh^2(\delta_0 - \sqrt{\rho(\rho-1)}) = \rho$$

によって与えられるとき、 $|\delta| < \delta_0$  が成り立ち、 $\rho > 1$  である限り、方程式 (42) の解は 3 個存在する. そのうちの一つは不安定な均衡点であり、残りの二つは安定な均衡点となる. すなわち、安定な均衡点が 2 個存

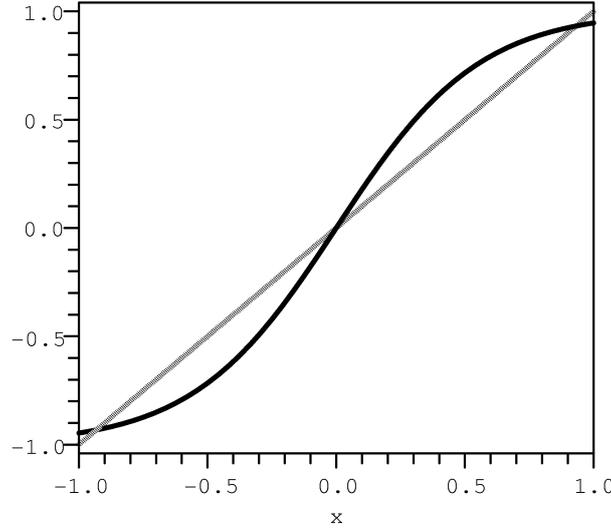


図 4: 複数均衡点 :  $\delta = 0.0, \rho = 1.8$

在する。

図 3 は、 $\delta = 0.2, \rho = 0.5$  のときのケースを示している。このときは、選好パラメーターが市場総体の選好としてブランド A を好むので、販売量の確率分布の頂点は少しだけブランド A の側に寄っている。選好パラメーターがゼロ ( $\delta = 0$ ) であるときには、分布の頂点はちょうどゼロの位置に来る。図 4 は、 $\delta = 0, \rho = 1.8$  のケースでの結果を示している。このケースでは、市場での個々人の選好は各ブランドに関して無差別であるが、外部効果が人々に及ぼす影響が大きい場合に相当する。例えば、ブランド B に比べてより多くの比率でブランド A が購入されていることを観察するとき、個々の消費者がブランド A を購入するようになる傾向を持つという行動パターンをモデル化している。この場合、どちらのブランドが圧倒的に大きい市場占有率を持つに至るかは偶然的な歴史に依存することとなり、ブランド A が市場をほぼ独占するか、ブランド B が市場を独占するかは分からない。各ブランドの市場占有率の優劣についてはモデル上では確定できない。図 4 に描かれているような均衡点が 2 個存在するという結果は、この不確定性を表現するものである。なお、どちらの均衡点の実現しても、優勢なブランドが市場をすべて独占することはできず、他のブランドの製品も少量であっても購入されている。

このモデルでのフォッカー・プランク方程式は (23) より、

$$\frac{\partial P(x, t)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x}[K(x)P(x, t)] + \frac{\epsilon}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2}[Q(x)P(x, t)]$$

で与えられる。ここで、

$$K(x) = \frac{w_{x,x+1} - w_{x,x-1}}{N}; \quad Q(x) = \frac{w_{x,x+1} + w_{x,x-1}}{N}$$

である。よって、

$$K(x) = \frac{\sinh(\delta + \rho x) - x \cosh(\delta + \rho x)}{\cosh(\delta + \rho x)}$$

$$Q(x) = \frac{\cosh(\delta + \rho x) - x \sinh(\delta + \rho x)}{\cosh(\delta + \rho x)}$$

と計算できる。フォッカー・プランクの方程式の定常解、つまり定常確率分布を求める。定常状態では、

$$\frac{\partial P(x, t)}{\partial t} = 0$$

が成立しなければならない。よって、確率束は時間に関係せず一定である、

$$J(x) = K(x)P(x, t) - \frac{\epsilon}{2} \frac{\partial}{\partial x} [Q(x)P(x, t)] = \text{一定値} \quad .$$

境界条件から、 $n = -N, n = N$  では確率束の流出入はないので、

$$J(-1) = J(1) = 0$$

とおける。したがって、

$$K(x)P(x) = \frac{\epsilon}{2} \frac{\partial}{\partial x} [Q(x)P(x)]$$

が成り立つ。これを解くと、定常確率分布  $P(x)$  として

$$P(x) = \frac{Q(x_0)P(x_0)}{Q(x)} \exp\left\{\frac{2}{\epsilon} \int_{x_0}^x \frac{K(x)}{Q(x)} dx\right\}$$

が得られる。図5は、 $\delta = 0.2, \rho = 0.5$  のケースを示している。このケースでは、すでに説明したとおり、均衡点はユニークに定まっているので、確率分布は単峰となっている。これに対して、図6は  $\delta = 0.0, \rho = 2$  のケースを示している。このケースでは、均衡点はユニークに定まらず、複数存在する。確率分布は二つの頂点を持つ分布となっている。

#### 4.4 技術革新と模倣による産業変動のモデル

ある産業は  $N$  社の企業からなり、各企業はイノベーションを積極的に行う企業、あるいはイノベーションを模倣した企業からなる企業群と、旧来の技術で生産をしている企業群の2種類のグループに分類できるとする。グループAに属する企業はイノベーションの結果優越した技術を持つ企業群とし、グループBは旧来のローテク技術で生産を行っている企業群とする。グループAに属する企業数を  $n$  とする。従って、グループBに属する企業数は  $N - n$  である。グループBに属する企業は企業独自のR&D活動によって新技術を手に入れることができる一方で、新技術を革新した企業の模倣をすることを通して優れた生産技術を手に入れる。この2種類の経済行動によってグループBの企業がグループAの企業に推移する限界推移率を

$$w_{n, n+1} = \mu(N - n) + \lambda \frac{n}{N} (N - n)$$

と仮定する。ここで、 $\mu$  はグループBに属する企業がR&D活動によって新技術の開発に成功する確率を表現し、 $\lambda$  はグループAの企業の生産技術の模倣に成功する確率を表している。このとき、マスター方程式は

$$\frac{\partial}{\partial t} P(n, t) = w_{n-1, n} P(n-1, t) - w_{n, n+1} P(n, t),$$

で与えられる。

前節での手続きと同じように、ここで、新しい変数

$$x = \frac{n}{N}, \quad \Delta x = \frac{\Delta n}{N} = \frac{1}{N} \equiv \epsilon,$$

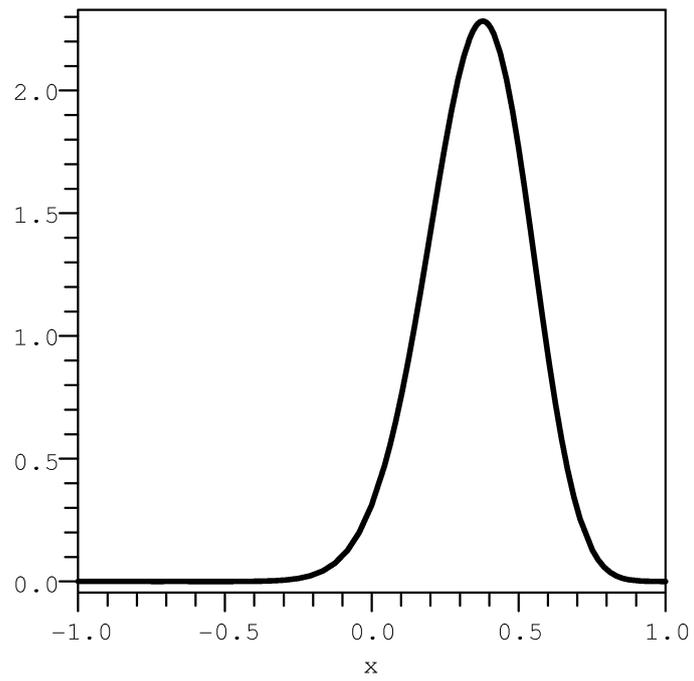


図 5: 均衡での確率分布 :  $\delta = 0.2, \rho = 0.5$

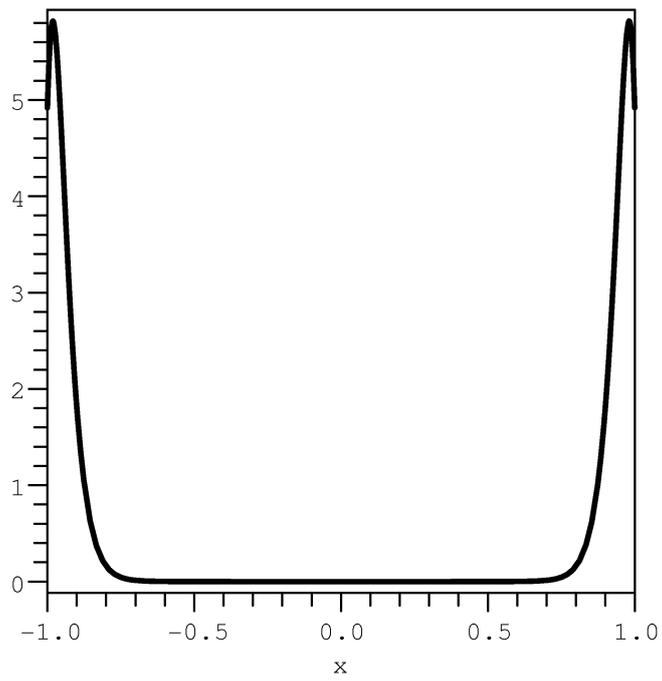


図 6: 複数均衡での確率分布 :  $\delta = 0.0, \rho = 2$

を導入する。  $1 \geq x \geq 0$  である。

$$x = \phi(t) + \frac{1}{\sqrt{N}}\xi \quad (n = N\phi + \sqrt{N}\xi),$$

とおく。さらに、  $\Pi(\xi, t) = P(N\phi + \sqrt{N}\xi)$  とおく。  $\tau = t/N$  と時間変数を変換すると、マスター方程式から推移率にかかっている  $N$  がキャンセルされて消去できる。  $\phi(\tau)$  は微分方程式

$$\frac{d\phi(\tau)}{d\tau} = \alpha_1(\phi)$$

に従う。飛躍モーメント  $\alpha_1$  は

$$\alpha_1(x) = \int_r r\Phi(x; r)dr = w_{n,n+1} = \mu(1-x) + \lambda x(1-x)$$

と計算される。従って、平均値の変動を支配する微分方程式は

$$\frac{d\phi(\tau)}{d\tau} = \mu(1-\phi) + \lambda\phi(1-\phi)$$

で与えられる。この微分方程式の解は

$$\phi(\tau) = \frac{C - \lambda e^{-(\lambda+\mu)\tau}}{C + \mu e^{-(\lambda+\mu)\tau}}$$

となる。ただし、

$$C = \frac{\lambda + \mu x_0}{1 - x_0}$$

である。これはいわゆるロジステック曲線であり、時間の経過と共に  $\phi(\tau)$  は 1 に漸近的に収束する。言い換えると、時間が十分に経過した後では、ほとんどすべての企業は自企業内に新しい生産技術を体化している。この結果は、企業数  $N$  が一定、つまり、古い生産技術を持つ企業が市場から退出しないと仮定しているからに他ならない。

市場からの退出および新規参入を明示的にモデルに導入することを考える。Taylor and Karlin(1998) が考察した人口遺伝学のモデルを借用しよう。企業総数  $N$  は変化しないとする。各企業は単位時間当たり  $\lambda$  の確率で市場から退出する。退出する企業のうちで、グループ A の企業が退出する確率は  $n/N$  で、グループ B の企業が退出する確率を  $1 - n/N$  と仮定する。退出した企業の代わりに、新しい企業が新規に市場に参入する。退出した企業は同一のグループに属する企業として新規参入するとは限らず、異なるグループの企業となって参入することも起こる。退出したグループ A の企業がグループ B の企業となって参入する確率を  $\gamma_1$ 、グループ B から退出した企業のうちグループ A の企業として新規参入する確率を  $\gamma_2$  と仮定する。よって、新規に参入した企業のうちグループ A の企業が参入する確率は

$$\frac{n}{N}(1 - \gamma_1) + (1 - \frac{n}{N})\gamma_2$$

で与えられる。

グループ A の企業数が増加するのは、グループ B の企業が市場から退出した場合だけで、さらに、グループ A の企業が新規参入する場合に限られる。従って、グループ A の企業数が増加する確率は

$$(1 - \frac{n}{N})[\frac{n}{N}(1 - \gamma_1) + (1 - \frac{n}{N})\gamma_2]$$

となる。同様に、グループ A の企業数が減少する確率は

$$\frac{n}{N}[(1 - \frac{n}{N})(1 - \gamma_2) + \frac{n}{N}\gamma_1]$$

で与えられる。このことから、単位時間当たりにグループ A の企業数が 1 社増加する限界推移率 (出生率) は

$$w_{n,n+1} = \lambda \left(1 - \frac{n}{N}\right) \left[ \frac{n}{N} (1 - \gamma_1) + \left(1 - \frac{n}{N}\right) \gamma_2 \right] N$$

として、単位時間当たりにグループ A の企業数が 1 社減少する限界推移率 (死滅率) は

$$w_{n,n-1} = \lambda \frac{n}{N} \left[ \left(1 - \frac{n}{N}\right) (1 - \gamma_2) + \frac{n}{N} \gamma_1 \right] N$$

として定式化できる。

パラメターの形式が複雑なので、定常確率分布のみを計算する。新しいパラメターを

$$a = \frac{N\gamma_1}{1 - \gamma_1 - \gamma_2}, \quad b = \frac{N\gamma_2}{1 - \gamma_1 - \gamma_2}$$

と定義すると、出生率と死滅率は

$$w_{n,n+1} = \frac{\lambda(N-n)}{N} (1 - \gamma_1 - \gamma_2) \left(1 + \frac{a}{N}\right),$$

$$w_{n,n-1} = \frac{\lambda(N-n)}{N} (1 - \gamma_1 - \gamma_2) \left(1 + \frac{a}{N-n}\right)$$

と変形できる。出生死滅過程の定常確率分布  $\pi_n, n = 1, 2, \dots$  は

$$\pi_n = \frac{\theta_n}{\sum_{k=0}^{\infty} \theta_k}$$

で与えられることが知られている。ただし、 $\theta_k$  は

$$\theta_k = \frac{w_{0,1} w_{1,2} \cdots w_{k-1,k}}{w_{1,0} w_{2,1} \cdots w_{k,k-1}}, \quad k \geq 1, \quad \theta_0 = 1$$

と定義されている。この式に上の推移率を代入すれば、定常分布が求められる。

ここで、簡単な計算から

$$\ln \theta_k = \sum_{j=1}^{k-1} \ln \left(1 + \frac{a}{j}\right) - \sum_{j=1}^{k-1} \ln \left(1 + \frac{b}{N-j}\right) + \ln Na - \ln(N-k)k \left(1 + \frac{b}{N-k}\right)$$

が成立することが分かる。以下では、 $N$  が無限大になる極限的なケースを考える。ただし、

$$\gamma_1 N \rightarrow \alpha_1, \quad \gamma_2 N \rightarrow \alpha_2$$

が満たされるように、極限  $N \rightarrow \infty$  をとることにする。さらに、状態変数を

$$x = \frac{n}{N}, \quad 0 < x < 1$$

と変換する。簡単な計算と極限操作から

$$\pi_n \approx \frac{x^{\alpha_2-1} (1-x)^{\alpha_1-1}}{\int_0^1 x^{\alpha_2-1} (1-x)^{\alpha_1-1} dx}, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (43)$$

が得られる<sup>19</sup>。この分布は、パラメター  $\alpha_1, \alpha_2$  を持つベータ分布と呼ばれる確率分布の典型的な例となっている。

<sup>19</sup> この結論に至る途中経過の詳細計算については、Taylor and Karlin(1998), pp.375-376 を参考にしてください。

最後に、企業の種類が一般的に  $K$  タイプの企業に分類され、総企業数も変化しうるより一般的なケースを考える。  $j$  タイプの企業数を  $n_j$  と表記すると、

$$n_1 + n_2 + \cdots + n_K = N$$

でなければならない。すなわち、各タイプの企業数の合計は総企業数  $N$  に一致する。各タイプの企業数を表現する状態ベクトルを

$$\mathbf{n} = (n_1, n_2, \dots, n_K)$$

と表記する。ベクトル  $\mathbf{e}_j$  で  $j$  番目の要素だけが 1 の単位ベクトルを表現する。例えば、 $K = 3$  のとき、

$$\mathbf{e}_1 = (1, 0, 0), \mathbf{e}_2 = (0, 1, 0)$$

である。限界推移率を以下のように仮定する。  $j$  タイプの企業が市場から退出する推移率 (退出率、死滅率) を

$$w(\mathbf{n}, \mathbf{n} - \mathbf{e}_j) = c_j \frac{n_j}{n}, j = 1, 2, \dots, K \quad (44)$$

で、  $j$  タイプの企業が新規に参入する推移率 (参入率、出生率) を

$$w(\mathbf{n}, \mathbf{n} + \mathbf{e}_j) = d_j \frac{n_j + \alpha_j}{n + \alpha}, j = 1, 2, \dots, K \quad (45)$$

と想定する。ただし、

$$\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_K, \alpha_j > 0$$

と仮定する。このとき、初期の状態ベクトルが  $\mathbf{n}$  であるとき、タイプ  $i$  の企業がタイプ  $j$  の企業に変化した後の状態ベクトルは  $\mathbf{n} - \mathbf{e}_i + \mathbf{e}_j$  と表現できる。タイプ  $i$  の企業がタイプ  $j$  の企業に変化する推移率は、タイプ  $i$  の企業が市場から退出してタイプ  $j$  として新たに市場に参入する限界推移率と等しいと想定できる。従って、

$$w(\mathbf{n}, \mathbf{n} - \mathbf{e}_i + \mathbf{e}_j) = w(\mathbf{n}, \mathbf{n} - \mathbf{e}_i)w(\mathbf{n} - \mathbf{e}_i, \mathbf{n} - \mathbf{e}_i + \mathbf{e}_j) = c_i \frac{n_i}{n} d_j \frac{n_j + \alpha_j}{n + \alpha - 1}$$

が成立する。同様に、

$$w(\mathbf{n}, \mathbf{n} + \mathbf{e}_i - \mathbf{e}_j) = w(\mathbf{n}, \mathbf{n} - \mathbf{e}_j)w(\mathbf{n} - \mathbf{e}_j, \mathbf{n} + \mathbf{e}_i - \mathbf{e}_j) = c_j \frac{n_j}{n} d_i \frac{n_i + \alpha_i}{n + \alpha - 1}$$

である。

$$\mathbf{n}' = \mathbf{n} + \mathbf{e}_i - \mathbf{e}_j$$

と表現すると、

$$\mathbf{n} = \mathbf{n}' - \mathbf{e}_i + \mathbf{e}_j$$

である。よって、

$$w(\mathbf{n}', \mathbf{n}' - \mathbf{e}_i + \mathbf{e}_j) = w(\mathbf{n}', \mathbf{n} - \mathbf{e}_i)w(\mathbf{n}' - \mathbf{e}_i, \mathbf{n}' - \mathbf{e}_i + \mathbf{e}_j) = c_i \frac{n_i + 1}{n} d_j \frac{n_j + \alpha_j - 1}{n + \alpha - 1}$$

となる。詳細釣合いの条件式は

$$\pi(\mathbf{n})w(\mathbf{n}, \mathbf{n}') = \pi(\mathbf{n}')w(\mathbf{n}', \mathbf{n})$$

である。上で求めた推移率を代入すると、

$$\pi(\mathbf{n})c_j \frac{n_j}{n} d_i \frac{n_i + \alpha_i}{n + \alpha - 1} = \pi(\mathbf{n}')c_i \frac{n_i + 1}{n} d_j \frac{n_j + \alpha_j - 1}{n + \alpha - 1}$$

が得られる。ここで、定常分布が積の形になると想定して、

$$\pi(\mathbf{n}) = \pi(n_1)\pi(n_2)\cdots\pi(n_K)$$

とおくと

$$\pi_i(n_i)\pi_j(n_j)c_j\frac{n_j}{n}d_i\frac{n_i+\alpha_i}{n+\alpha-1} = \pi_i(n_i+1)\pi_j(n_j-1)c_i\frac{n_i+1}{n}d_j\frac{n_j+\alpha_j-1}{n+\alpha-1}$$

が成立する。この関係式から、 $n_i$  と  $n_j$  の各項の漸化式を計算すると、

$$\frac{\pi_i(n_i+1)}{\pi_i(n_i)} = B_i g_i \frac{n_i+\alpha_i}{n_i+1}, \quad (46)$$

$$\frac{\pi_j(n_j)}{\pi_j(n_j-1)} = B_j g_j \frac{n_j-1+\alpha_j}{n_j} \quad (47)$$

が導出できる。ただし、 $B_i, B_j$  は  $\pi_i$  が確率分布となる条件を満たすように定められる未定定数で、係数  $g_i$  は

$$g_i = \frac{c_i}{d_i}$$

で与えられる。条件  $\sum_{n_i} \pi_i(n_i) = 1$  を満たすように定数  $B_i$  を定めると、 $i$  タイプの企業数  $n_i$  の確率分布は

$$\pi_i(n_i) = (1-g_i)^{\alpha_i} \frac{\alpha_i^{[n_i]}}{n_i!} g_i^{n_i} \quad (48)$$

となる。ここで、

$$\alpha_i^{[n_i]} = \alpha_i \cdot (\alpha_i + 1) \cdots (\alpha_i + n_i - 1)$$

である。各タイプの企業数の確率分布 (48) は以下のようにも変形することができる。

$$\pi_i(n_i) = (1-g_i)^{\alpha_i} (-g_i)^{n_i} \binom{-\alpha_i}{n_i}, \quad i = 1, 2, \dots, K$$

これは負の二項分布 (negative binomial distribution) と呼ばれる確率分布となっている。負の二項分布の平均値は簡単な計算から、

$$E[n_i] = \alpha_i \frac{1-g_i}{g_i}, \quad i = 1, 2, \dots, K$$

となることが分かる。これがタイプ  $i$  に属する企業数の平均値となる。市場に存在する総企業数  $N$  の平均値は

$$E[N] = \sum_{i=1}^K \alpha_i \frac{1-g_i}{g_i}$$

で与えられる。企業数が正となるためには、 $g_i < 1$  が必要である。 $g_i = 1$  である場合、各タイプの企業数を表現する状態ベクトル  $\mathbf{n}$  の確率分布は以下のポリア分布関数

$$\pi(\mathbf{n}) = \frac{n!}{\alpha^{[n]}} \prod_{i=1}^K \frac{\alpha_i^{[n_i]}}{n_i!}.$$

となることが知られている<sup>20</sup>。

こうして、退出率が (44)、参入率が (45) であるような飛躍型マルコフ過程における定常確率分布は解析的に容易に計算できる。このような退出率および参入率の定式化は、確率過程論のテキストで頻りに登場

<sup>20</sup>青木 (2003) の第 3 章を参照ください。

する典型的な例である。しかし、このモデルが経済現象のモデルとして機能するためには、モデルにおける仮定の現実性をある程度問題としなければならない。この意味で、上記のモデルで仮定した企業の市場への参入率 (45) および市場からの退出率 (44) が、現実の企業行動に見られる経済動機の合理性と整合的かという問題を提起することは重要である。モデルが現実の企業行動の経済的な合理性、例えば、利潤動機の合理性を反映していなければ、モデルの結論は無意味であり、空論となってしまう。より現実性を持たせた限界推移率の関数形を特定化することは残された重要な課題である。その一方で、参入率および退出率がより一般的な関数形をしている場合、モデルの解析的な計算は困難となってくることも容易に推測される。

以上の議論では、新しい産業の登場や新製品の開発のような新しいタイプの企業の登場をモデル化できていない。これを実現するためには、前節までに導入してきたモデル化の手法だけでは不十分で、新しい分析手法が要求される。

## 参考文献

本稿で引用した確率過程論のテキストを以下にあげる。なお、拙著『講義ノート 経済学のための確率過程論入門』(Latexによるmimeo)をご利用のリクエストがあれば、dviファイルをEmailでお送りします。

- (1). Samuel Karlin and Howard M. Taylor(1975), *A First Course in Stochastic Processes*, Academic Press.
- (2). Samuel Karlin and Howard M. Taylor(1981), *A Second Course in Stochastic Processes*, Academic Press.
- (3). N. G. Van Kampen(1992), *Stochastic Processes in Physics and Chemistry*, North-Holland.
- (4). Howard M Taylor and Samuel Karlin(1998), *An Introduction to Stochastic Modeling*, 3rd edition, Academic Press.

経済動学を確率力学系モデルで分析した研究の主な参考文献は以下のようなものである。(7),(8)はWEHIAでの報告論文を収録した論文集である。

- (1). Masanao Aoki(1996), *New Approaches to Macroeconomic Modeling*, Cambridge University Press.
- (2). Masanao Aoki(202), *Modeling Aggregate Behavior and Fluctuations in Economics*, Cambridge University Press.
- (3). 青木 正直 (2003), 『異質的エージェントの確率動学入門』、共立出版.
- (4). Masanao Aoki and Hiroshi Yoshikawa(2007), *Reconstructing Macroeconomics: A Perspective from Statistical Physics and Combinatorial Stochastic Processes*, Cambridge University Press.
- (5). W. Brian Arthur(1994), *Increasing Returns and Path Dependency in the Economy*, the University of Michigan Press.
- (6). W. Brian Arthur(1988), Self-Reinforcing Mechanisms in Economics, in *The Economy as an Evolving Complex System*, SFI Studies in the Science of Complexity, Addison-Wesley.
- (7). A. P. Kirman(1992), Whom or What does the Representative Individual Represent?, *Journal of Economic Perspective*.
- (8). Mauro Gallegati, Alan P. Kirman, and Matteo Marsili(2004), *The Complex Dynamics of Economic Interaction: Essays in Economics and Econophysics*, Springer.
- (9). Thomas Lux, Stephan Rietz, and Eleni Samanidou(2005), *Nonlinear Dynamics and Heterogeneous Interacting Agents*, Springer.

生物学、社会学および政治学などの領域でマスター方程式を用いて分析した研究については、以下の文献が有用である。

- (1). Wolfgang Weidlich and Gunter Haag(1983), *Concepts and Models of a Quantitative Sociology*, Springer-Verlag.
- (2). Wolfgang Weidlich(2000), *Sociodynamics: A Systematic Approach to Mathematical Modelling in the Social Sciences*, Dover Publication.

経済物理学関係のテキストとして、以下のものが有用である。

- (1). A. C. C. Coolen(2005), *The Mathematical Theory of Minority Games: Statistical Mechanics of Interacting Agents*, Oxford University Press.
- (2). Benoit B. Mandelbrot(1997), *Fractals and Scaling in Finance: Continuity, Concentration, and Risk*, Springer.
- (3). Rosario N. Mantegna and H. Eugene Stanley(2000), *An Introduction to Econophysics: Correlations and Complexity in Finance*, Cambridge University Press.
- (4). Joseph L. McCauley(2004), *Dynamics of Markets: Econophysics and Finance*, Cambridge University Press.
- (5). Bertrand M. Roehner(2002), *Patterns of Speculation: A Study in Observational Econophysics*, Cambridge University Press.