

社会的ネットワークの特徴

増山 幸一

明治学院大学経済学部

2015年9月

1 ネットワークの例

会社や組織の管理・運営、新商品の研究開発、大学のクラスやサークル、あるいは、趣味やスポーツの同好会など、様々な社会的経済的な活動を結節点として、現実社会での人間関係の人的ネットワークは形成されていく。私たちは、日常的に、人と人の中に形成された社会的なネットワークの中で日々の生活を送っている。以下の図は、ビクトル・ユーゴの小説『Les Misérables』における登場人物をノードとし、彼らとの人間関係をリンクで結んで描いたものである。人間関係の大きさに応じてリンク数が多くなる。当然のことながら、主人公のジャン・バルジャンとファンティヌとその娘コゼットに接続するリンク数が最も多い。ノード番号11がValjean、ノード23がFantine、ノード26がCosetteに対応する。

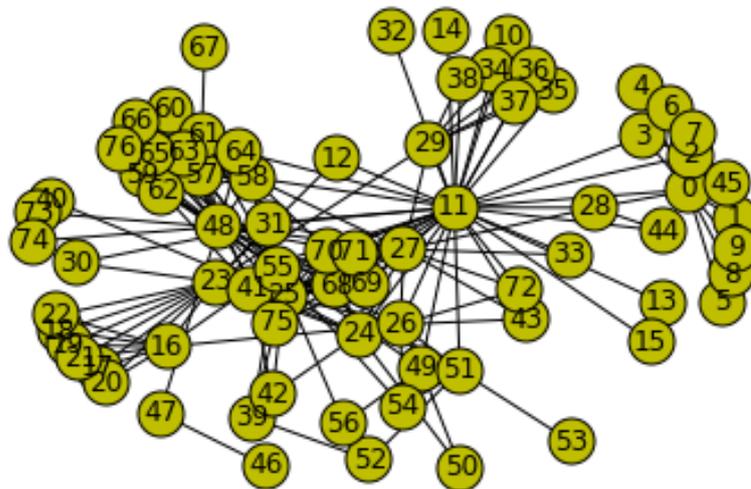


Fig.1.1 『Les Misérables』における人間関係

最も基本的な意味で、ネットワークとは、ある対象物と他の対象物の組がリンクによって連結されているような対象物とリンクの組合せの集合である。ソーシャル・ネットワークの例として必ず登場するのが、

Zachary による大学空手倶楽部を通じた学生間の友人関係のネットワークである。以下のグラフがそれを示している。

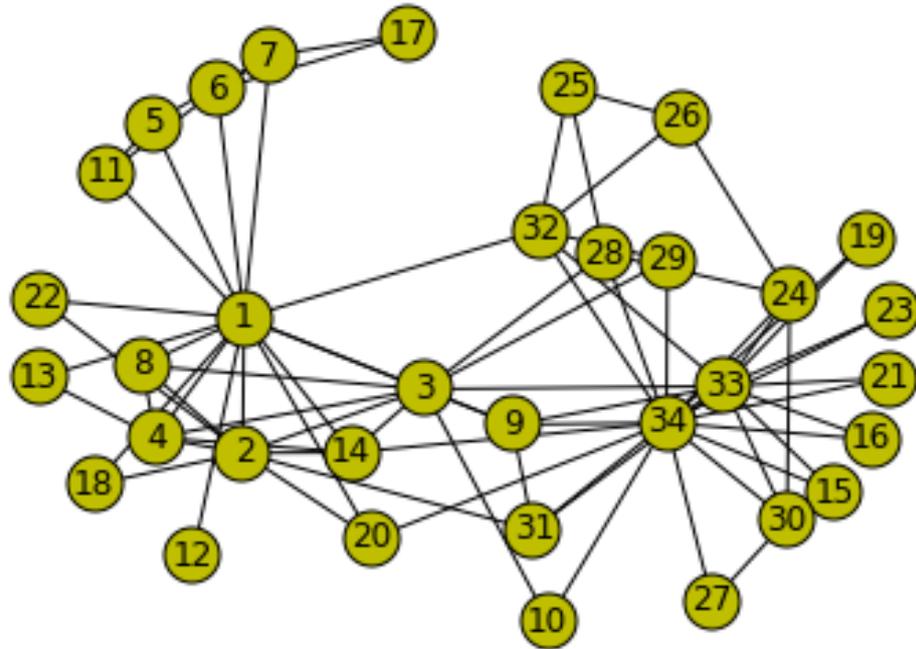


Fig.1.2 空手クラブを介した友人関係

34名からなる友人ネットワークの中で、ノード番号1と34が最も多いリンク（友人）数を持つ。

以下の図は、1970年12月時点でのARPANET(Advanced Research Projects Agency Network)と呼ばれるコンピュータ・インターネットのネットワーク構造を描いたものである。ARPANETは1969年に米国国防総省の国防高等研究計画局のもとに構築された研究・調査のための大型汎用コンピュータのネットワークである。最初はUCLAとスタンフォード大学との間で試験的に回線が引かれ、後に、UCLA、UCSB、SRI、スタンフォード大学、ユタ大学を結ぶ専用回線が敷設された。

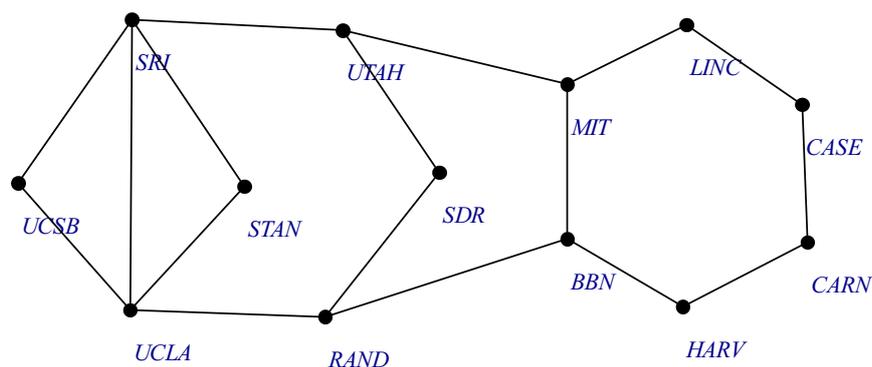


Fig.1.3 1970年12月でのARPANETネットワーク

各ノードはホスト・コンピュータが置かれている大学等を表現しており、リンクは各ホスト・コンピュータが専用回線で直接に接続していることを示す。ホスト・コンピュータを置く機関は、地理的には東海岸のMITやハーバード大学から西海岸のスタンフォード大学やUCLAなどの13大学等で、ネットワーク上では、リンクされた各ノード間の地理的距離はあまり関係がない。ちなみに、RAND研究所はカリフォルニア州サンタモニカに位置するが、BBN社はマサチューセッツ州ケンブリッジに位置する。このネットワークは情報通信ネットワークの典型例である。

学校生活、趣味やボランティア活動などの社会的な活動、あるいは、会社や組織を管理・運営する、商品販売の営業をする、共同研究開発に従事するなどという経済的な活動を結節点として、通常の社会的ネットワークは形成されていく。参加している社会的団体や経済的組織はネットワーク形成におけるフォーカル・ポイント（中心点）と呼ばれている。団体・組織の集合をフォーカル・ポイントとして形成されるネットワークは2部グラフ (bipartite graph) として表現できる。2部グラフでは、各ノードは、個人からなる集合と、団体・組織からなる集合のどちらかに2分類され、個人集合に属するノードと団体・組織に属するノードの間にリンクが形成される。下の図は米国有名企業の取締役役間の2項ネットワークの例である。

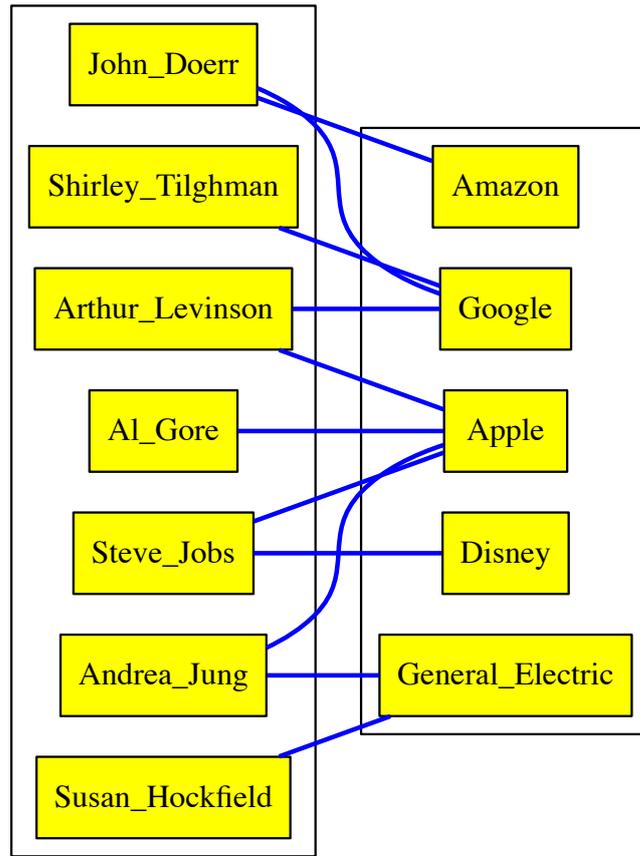


Fig.1.4 2部ネットワークの例 (2009年米国IT系会社の取締役会のネットワーク)

2 ネットワークの定義

ネットワークは、抽象的には、ノード (nodes, vertices) と各ノードを接続するリンク (edges, links) の集合からなる。各ノードに番号 i をつける。 n 個のノードからなるネットワークを考えると、ノードの集合を $N = \{1, 2, 3, \dots, n\}$ とする。ノード i がこのネットワークに属していれば、 $i \in N$ である。ノード i とノード j との間のリンク接続を変数 g_{ij} で表現する。 $g_{ij} = g_{ji} = 0$ であるとき、ノード i とノード j の間には何の関係もない。ノード i の行動とノード j の行動の間に関係性があるときは、 $g_{ij} \neq 0$ または $g_{ji} \neq 0$ である。ノード間の関係に方向性がないとき、つまり、リンク接続が両方向であるとき、 $g_{ij} = g_{ji} = 1$ となる。無方向グラフ (undirected graph) と言う。依存関係に方向性があるとき、例えば、 i から j への依存性はないが、 j から i への依存関係があるとき、 $g_{ji} = 0, g_{ij} = 1$ などと表現する。このようなネットワークをリンクが方向づけられているので、有向グラフ (directed graph) という。以下での議論では、断りがない限り、無方向グラフを対象とする。

ノードの集合 N と各ノード間のリンク構造 G が与えられるとき、一つのグラフが記述できる。これを一般的にグラフ (ネットワーク) $g = (N, G)$ と表記する。 G は (i, j) 要素を g_{ij} とする $n \times n$ 行列である。行列

G は各ノード間の直接的な連結関係（隣人関係）を表現しているので、隣接行列 (adjacency matrix) と呼ばれる。

以下のネットワーク例を取上げます。 $N = \{A, B, C, D, E, F, G\}$ とする。各ノード間のリンク構造、隣接行列 G が以下の表で与えられている。

例 2.1

隣接行列の例

	A	B	C	D	E	F	G
A	0	1	1	1	1	0	0
B	1	0	0	0	0	1	1
C	1	0	0	1	0	0	0
D	1	0	1	0	0	0	0
E	1	0	0	0	0	1	0
F	0	1	0	0	1	0	0
G	0	1	0	0	0	0	0

このグラフを視覚化して描いてみると、Fig. 2.4 に描かれたネットワークとなる。このネットワークの特徴を見てみよう。ノード A はノード B、C、D、E とリンクで接続している。つまり、ノード B、C、D、E はノード A の隣人 (neighbors) である。隣人の数を次数 (degree) と言う。ノード A は 4 人の隣人、つまり、次数 4 を持つ。ノード B は 3 人の隣人を持つ。

an example of connected networks

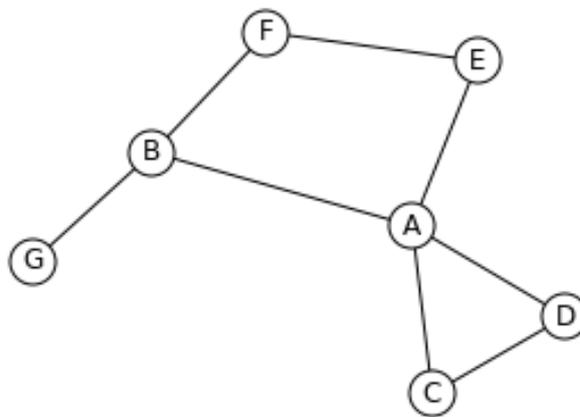


Fig.2.1 パスと連結されたネットワークの例

ネットワーク上で、リンクによって連結しているノードの点列をウォーク (walk) という。同一のノードが一つのウォークに複数回登場することもあり得る。ウォークの中のノードがすべて異なっているとき、パス (path) という。出発するノードと終端ノードが同じようになっているノードの点列をサイクル (cycle) という。

Fig2.4の例でいうと、ノード A からノード G に到達するパスは 2 個あり、A-E-F-B-G と A-B-G である。このうち、A-B-G の方が最短距離で到達するパスになっている。A-C-D-A はサイクルになっている経路である。A-E-F-B-A もサイクルである。

正確に定義する。ノード i に連結するリンクをもつすべてのノードの集りを $N_i(g) = \{j \in N | g_{ji} = 1\}$ で表記する。 N_i がノード i の隣人集合である。ノード i に直接的にリンクされた隣人の数 $\eta_i(g) = |N_i(g)|$ はノード i の次数である。言い換えると、 $\eta_i(g) = |N_i(g)|$ はネットワーク g に属するノード i の隣人の数を表す。ここで、 $|X|$ は集合 X の要素数を表現している。上の例では、 $N_A = \{B, C, D, E\}$, $\eta_A = 4$ となっている。同様に、 $N_B = \{A, F, G\}$, $\eta_B = 3$ である。

k 個の隣人を持つノードの集合を $N_k(g)$ とすると、グラフ内のすべてのノードは、互いに異なる $n - 1$ 個の集合

$$N_1, N_2, \dots, N_{n-1}$$

に分割できる。上の例では、

$$N_1 = \{G\}, N_2 = \{C, D, E, F\}, N_3 = \{B\}, N_4 = \{A\}$$

となっている。

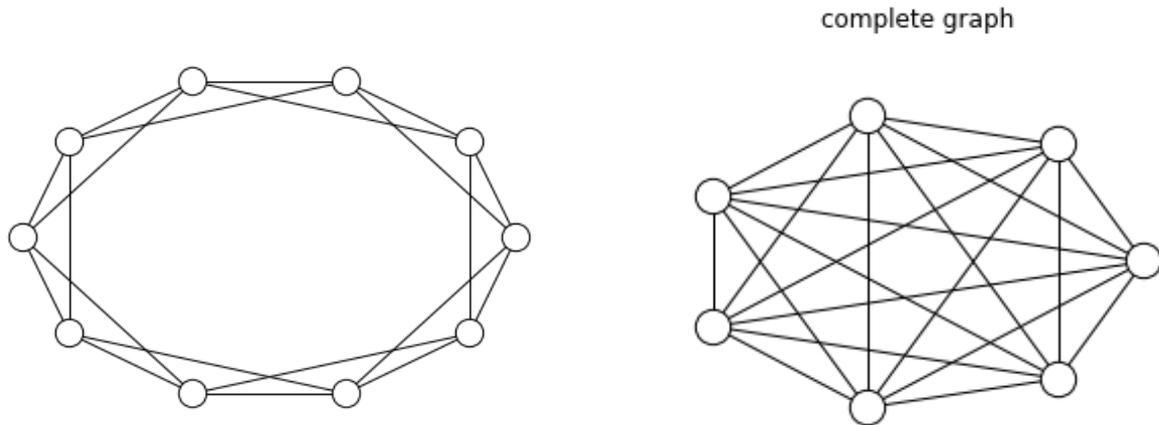


Fig.2.2 正則グラフと完備グラフ

すべてのノードが同一数の次数を持つようなネットワークを正則グラフ (regular graph) という。Fig. 2.5 に正則グラフの例が描かれている。この例では各ノードは同一の次数 4 を持っている。 $\eta_i = n - 1$ であるとき、つまり、各ノードがネットワーク内の他のすべてのノードと連結しているとき、完備ネットワーク (complete network) という。一つのノードを中心として、他のすべてのノードがこの中心ノードとだけ連結しているネットワークをスター型ネットワークと言う。

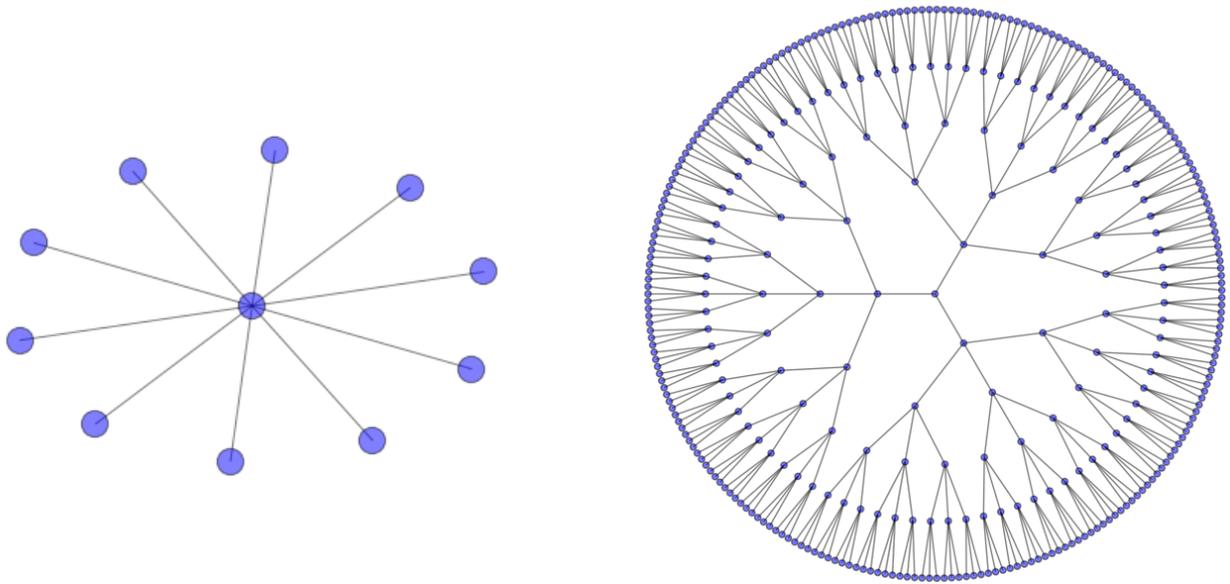


Fig.2.3 スター型グラフとツリー状になったスター型グラフ

次数 k を持つノードの割合（次数分布） $\text{Pr}(k)$ は

$$\text{Pr}(k) = \frac{|\mathbb{N}_k(g)|}{n}$$

と定義される。明らかに、 $\sum_{k=0}^{n-1} \text{Pr}(k) = 1$ である。再び上の例で計算すると、 $N = 7$ なので

$$\text{Pr}(1) = \frac{1}{7}, \text{Pr}(2) = \frac{4}{7}, \text{Pr}(3) = \frac{1}{7}, \text{Pr}(4) = \frac{1}{7}$$

となる。次数分布の分散は、スター型ネットワークでは、 n とともに増加し、正則ネットワークではゼロとなる。

ここで、ネットワークの特徴を表現する上で重要な言葉を定義する。ネットワーク内のある部分集合を取り出し、この部分集合に属する異なる二つのノードの間にパスが存在するとき、これらのノードは同一のコンポーネント (*component*) に属するという。コンポーネントはネットワークの部分ネットワークで、その中のすべてのノードが連結している最大の部分集合である。ネットワークは通常、複数のコンポーネントを含んでいる。ネットワーク上のすべてのノードの組がそれらを接続するパスを持っているとき、ネットワークは連結している (*connected*) という。連結したネットワークはただ一つのコンポーネントをもつ。例えば、Fig 2.4 のネットワークは連結しており、ただ一つのコンポーネントから形成されている。

以下の例では、コンポーネントが複数個存在するケースを描いている。ネットワーク全体のノード数は 15 である。ネットワーク全体としては連結していないが、各コンポーネント内の各ノードは連結している。

an example of components

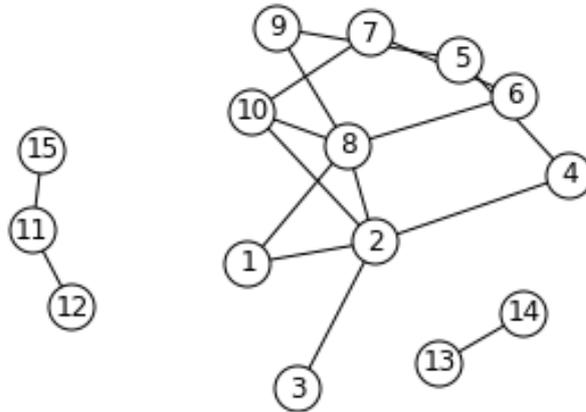


Fig.2.4 サブネットワークとコンポーネント

二つのノードを結ぶ最短パスの距離を測地距離（最短距離）(*geodesic distance*) という。ネットワーク上にある二つのノード間の距離は通常、この最短距離のことをさす。ネットワーク上の任意の二つのノード間の最短距離の最大値をネットワークの直径 (*diameter*) という。各ノード間の最短距離の平均を取った値をパスの平均距離という。

3 中心化と群集化の諸概念

社会・経済ネットワークの分析で最初に登場する代表的な例の一つは15世紀初期イタリア・フィレンツェにおける *Medici* 家の興隆を巡る家系間のネットワーク分析である。政略的結婚を通じた血縁ネットワークの拡大をテコに富と政治的権力を獲得していった過程を分析するために、以下で定義する中心化度 (*centrality*) の概念が活用された。

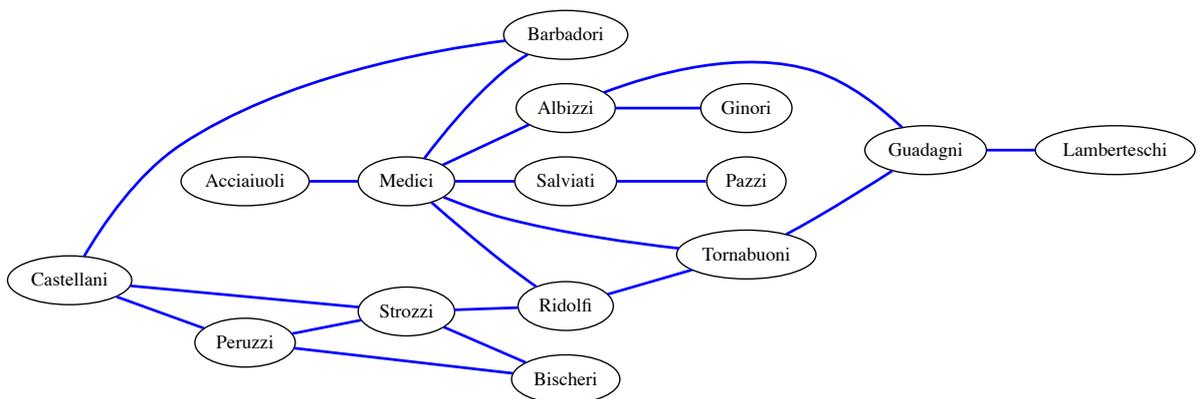


Fig.3.1 15世紀フィレンツェにおける *Medici* 家と主要家系のネットワーク

Padgett and Ansell(1993)の研究によれば、15世紀フィレンツェにおける主要な血縁門閥のネットワークは Fig.3.1 にある通りである。この例を通して、中心化度とりわけ中継中心化度の概念の重要性を理解する。

各ノードがネットワーク上でどれくらいの重要性を占めているかを測る計数として中心化度 (*centrality*) を定義する。中心化度は4種類の統計量に従って計測することが出来るので、異なる4種類の定義が存在する。

1. 次数 (*degree*) に基づく中心化度の計測：ノードがどのように接続されているかを計測
2. 近接性 (*closeness*) に基づく中心化度の計測：各ノードが互いにかに容易に到達し得るのかを計測
3. 中継性 (*betweenness*) に基づく計測：他のノードに到達する上でいかに重要な役割を果たすかを計測
4. 隣人 (*neighbors*) の特性に基づく計測：ノードの隣人がいかに重要なあるいはいかに強い影響力を持つかを計測

次数中心化度 (*degree centrality*) とは、ノード i の次数中心化度 $C_d(i; g)$ とは、このノードの次数を最大可能な次数で割った値をいう。

$$C_d(i; g) = \frac{\eta_i(g)}{n-1}$$

中継中心化度 (*betweenness centrality*) は以下のように定義される。ノード i とノード j を結びつける最短距離のパスの総数を $P(i, j)$ と表記し、これらのパス経路の中にノード k が含まれているパス経路数を $P_k(i, j)$ と表記する。ノード k の中継中心化度 (*betweenness centrality*) は、直感的は、

$$C_b(k; g) = \sum_{i \neq j, k \notin \{i, j\}} \frac{P_k(i, j)}{P(i, j)}$$

である。しかし、この定義だと、ノード数 n が大きくなるにつれて、この中心化度の値も大きくなる。値を正規化するためには、つまり、区間 $[0, 1]$ に収めるためには、

$$C_b(k; g) = \sum_{i \neq j, k \notin \{i, j\}} \frac{P_k(i, j)/P(i, j)}{(n-1)(n-2)/2}$$

と定義する方が便利である。ここで、分母の値 $(n-1)(n-2)/2$ はノード k 以外の $n-1$ 個のノードから二つのノードを取り出す組合せ (リンク) の総数である。

この定義に沿って、Fig 3.1 の例における家系 i と家系 j を結びつける最短距離の経路の総数を $P(i, j)$ と表記し、これらの経路の中に家系 k が含まれている経路数を $P_k(i, j)$ と表記する。Barbadori 家と Guadagni 家を結ぶ最短距離の経路は、3つのリンク (枝) を経由する Barbadori - Medici - Tornabuoni - Guadagni という経路と Barbadori - Medici - Albizzi - Guadagni の経路の2経路である。だから、 $i = \text{Barbadori}$ 、 $j = \text{Guadagni}$ としたとき、 $P(i, j) = 2$ である。 $k = \text{Medici}$ とすると、 $P_k(i, j) = 2$ である。 $k = \text{Strozzi}$ とおくと $P_k(i, j) = 0$ 、 $k = \text{Albizzi}$ とおくと $P_k(i, j) = 1$ となる。Medici 家は Barbadori 家と Guadagni 家を結びつける上で中心的役割を果たす家系となっている。ネットワークにおけるこうした中心的役割を数量的に表現するのが、中継中心化度である。この計量化を活用すると、Medici 家の係数は 0.5219 となる。つまり、Medici 家以外の2家系を結ぶ最短経路総数のうち 52% の経路は Medici 家を經由していることがわかる。Strozzi 家の中継集中度指数を計算すると、0.103 となる。Medici 家の次にこの値が大きい家系は Guadagni

家で、その値は 0.2545 である。このことから、Medici 家の政略結婚がネットワークの構築にいかに重要な役割をはたしたかを理解できる。

この例に対して Networkx を用いて計算した詳細な結果を以下の表に示す。

例 3.1

フィレンツェにおける家系ネットワークの例

	clustering	degree sequence	degree centrality	betweenness centrality
'Castellani'	0.6666	3	0.2142	0.0549
'Peruzzi'	0.6666	3	0.2142	0.0219
'Strozzi'	0.3333	3	0.2142	0.1025
'Ridolfi'	0.3333	3	0.2142	0.1135
'Barbadori'	0.3333	3	0.2142	0.0934
'Medici'	0.0666	6	0.4285	0.5219
'Tornabuoni'	0.3333	3	0.2142	0.0915
'Bischeri'	0.0	1	0.0714	0.1043
'Guadagni'	0.0	4	0.2857	0.2545
'Lamberteschi'	0.0	1	0.0714	0.0
'Acciaiuoli'	0.0	1	0.0714	0.0
'Salviati'	0.0	2	0.1428	0.1428
'Pazzi'	0.0	1	0.0714	0.0
'Albizzi'	0.0	3	0.2142	0.2124
'Ginori'	0.0	1	0.0714	0.0

群集化 (clustering) の概念を理解するために、再び Fig.2.4 の例に戻ろう。ノード A の隣人は 4 人 (C,D,E,B) いる。この 4 人の中で知人同士になっている組は C-D の一組だけである。4 人の中から二人を取り出す組合せの数は $4!/2!2! = 6$ である。従って、隣人同士の組合せ (6 組) の中で知人同士である割合は $1/6$ となっている。これをクラスタリング係数という。つまり、自分の隣人が互いに知合いになっている確率である。

Fig.3.1 で、Medici 家にリンクを持つ家系ノードは 6 であり、そのうち一組だけ、Tornabuorn 家と Ridolfi 家のみが直接的にリンク接続している。なので、Medici 家のクラスタリング係数は

$$1/\frac{6!}{2!4!} = 1/15 = 0.0666$$

と計算できる。上記の結果とも符合する。

ノード i のクラスタリング係数は

$$Cl_i = \frac{\text{ノード } i \text{ の二人の隣人が直接的にリンクされている組合せの数}}{\text{ノード } i \text{ の隣人から二人を取り出す組合せの数}}$$

となる。より、正確に言うと、ノード i の群集化係数 (clustering coefficient)、 $Cl_i(g)$ 、は

$$Cl_i(g) = \frac{\sum_{j \in N_i(g)} \sum_{k \in N_i(g)} g_{jk}}{\eta_i(\eta_i - 1)} = \frac{\sum_{j < k, j, k \in N_i(g)} g_{jk}}{\eta_i(\eta_i - 1)/2}$$

と定義される。

ノード i がノード j と知合いで、ノード j がノード k と知合いであるとき、2本のリンク ij と jk からなるパス (path) $i-j-k$ が存在する。 i が k と知合いであれば、このパスは閉じていると言う。つまり、3辺 ij 、 jk 、 ki からなる3角形の閉じたパスができる。クラスタリング係数は、長さが2のパスの中で、3角形の閉じたパスになっているパスの割合を計測している。

$$\text{クラスタリング係数} = \frac{\text{長さが2の閉じているパスの数}}{\text{長さが2のパスの数}}$$

ネットワーク全体での平均的なクラスタリング係数 Cl を求める方法は

$$Cl = \frac{\text{閉じた3角形になっているパスの数} \times 3}{\text{長さ2のパスで連結された3ノードの組合せの数}}$$

で計算することになる。分子に $\times 3$ が登場するのは、3角形の頂点が3個あり、パスの出発するノードとしては3種類あり得るので。

Fig 2.3 から理解できる通り、スター型ネットワークでは、中心ノード以外のノード間にはリンクがないので、クラスタリング係数の値は0となる。完備ネットワークではすべてのノードが互いに接続しているのでクラスタリング係数は1となる。クラスタリング係数のもう一つの定義は各ノードのクラスタリング係数の加重平均を採用することである。

互いにリンクしているノード同士から構成される集合の最大の部分集合を派閥 (clique) という。コンポーネントとの相違に注意して下さい。 $k \geq 3$ として、 $I = \{i_1, i_2, \dots, i_k\} \subset N$ が以下の条件を満たすとき派閥という: I のすべての組合せ、 $i_x, i_y \in I$ に対して $g_{i_x i_y} = 1$ が成立し、この性質を持ち、かつ $I \subset I'$ となる集合 I' が存在しない。完備ネットワークでは、ネットワーク全体が派閥になる。

4 金融ネットワークのトポロジー

4.1 金融ネットワークの表現方法

金融ネットワークは銀行、証券会社や短資会社などの金融機関をノードとして形成されるネットワークであるが、リンクの形成は方向付けられている。資金が銀行 i から銀行 j に貸し付けられる場合、リンク接続は i から j に向かう方向性を持つ。この取引関係をリンク (i, j) で表現する。リンク (i, j) は銀行 i から出て行くリンク、アウト次数 (out-going degree) の一つとなる。他方、銀行 j から見れば、流入してくるリンク、イン次数 (in-coming degree) を形成する。リンクの接続方向は資金の流れと同じ方向とする。金融ネットワークの全ノード数を n とし、ノードの集合を $N = \{1, 2, \dots, n\}$ と表記する。リンク接続はこの集合の中から二つのノードを取り出すときの組合せの数だけ存在し得る。リンク接続の集合を $\mathcal{E}(N)$ と表記する。

金融機関の取引は取引回数の大小や取引額の大小が重要となる。金融機関 i (lender) から金融機関 j (borrower) への貸出し (loans) があるとき、ノード i からノード j へのリンク接続に取引回数の大小や取引額の大小に応じた重み $w_{ji} = w(j, i)$ を付ける。 W を $w_{ij} = w(i, j)$ を (i, j) 要素とするネットワークのリンク接続に関する重み行列とする。ネットワークのリンク接続の関係だけを理解するとき、便利な表現方法として隣接行列 (adjacency matrix) を使用する。隣接行列は以下のように定義される。ノード j からノード

ド i に資金が貸付けられている関係があれば、リンク接続を $a_{ij} = 1$ と表現する。つまり、

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & |w_{ij}| > 0 \text{ であるとき} \\ 0 & \text{それ以外の場合} \end{cases} \quad (1)$$

ij 要素を $\{a_{ij}\}$ とする行列 A を隣接行列という。

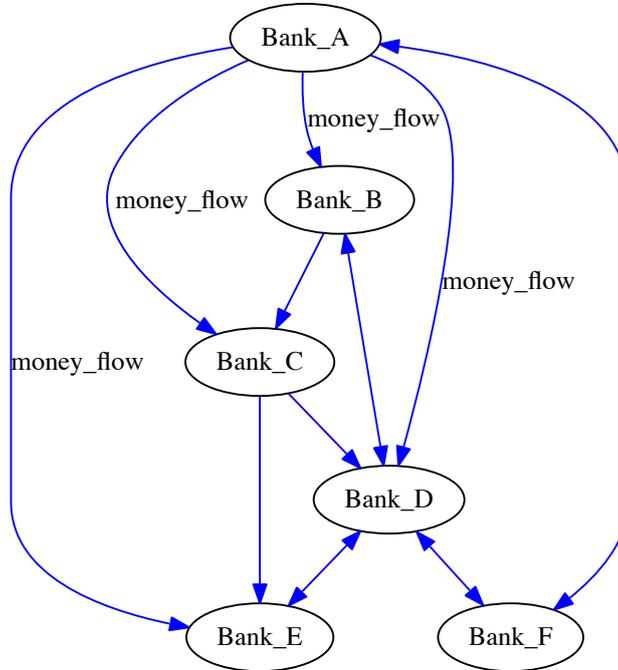


Fig.4.1 有向グラフ

ノード i に資金を提供しているノードの集合 (*predecessors*) を \mathcal{P}_i 、ノード i が資金を提供しているノードの集合 (*successors*) を \mathcal{S}_i と表記する。

$$\mathcal{P}_i = \{j : (i, j) \in \mathcal{E}(N)\}, \mathcal{S}_i = \{j : (j, i) \in \mathcal{E}(N)\}$$

金融機関 i の貸出先と借入先の集合 $\mathcal{N}_i = \mathcal{P}_i \cup \mathcal{S}_i$ はノード i の隣人ノードの集合となる。各ノード i の (借入先) イン次数を k_i^{in} とすると、

$$k_i^{in} = |\mathcal{P}_i| = \sum_j a_{ji}$$

であり、(貸出先) アウト次数 k_i^{out} は

$$k_i^{out} = |\mathcal{S}_i| = \sum_j a_{ij}$$

となっている。ここで、 $|A|$ は集合 A の要素数を表す。一つのイン次数は必ず一つのアウト次数を伴うので、ネットワーク全体で、イン次数の総数とアウト次数の総数は一致する。

$$\sum_{i=1}^n k_i^{in} = \sum_{i=1}^n k_i^{out} = m$$

が成立つ。ここで、 m はネットワークにおける総リンク数である。ノード当たりのリンク数は平均次数であるので、 $\langle k \rangle = m/n$ となる。ここで、 $\langle k \rangle$ は平均次数である。

有向グラフでは、*world wide web* に代表されるように、通常、ネットワーク全体を覆う巨大コンポーネントは存在しない。ネットワーク全体はいくつかのコンポーネントに分裂している。よく知られている通り、*world wide web* は4つのコンポーネントあるいはクラスターに分裂している*1。第1のクラスターは中央大陸であり、インターネットの全ウェブページの約28%を占め、GoogleやYahooなどの巨大サイトが住む地域である。この大陸では、どの二つのドキュメントも互いを連結するパスが存在している。つまり、この大陸に住むどの二つのノードをつなぐパスもこの大陸内に含まれている。この中央大陸を *GSCC*(*giant strongly connected component*) という。

第2,第3のクラスターは *IN*大陸 (*GIN*, *giant in-component*) と *OUT*大陸 (*GOUT*, *giant out-component*) と呼ばれている。*GIN* は中央大陸 *GSCC* に接続先を(直接的、間接的に)もつノードからなるコンポーネントで、*GSCC* から *GIN* に接続するリンクが存在しないコンポーネントである。つまり、*GIN* のノードからは *GSCC* のノードへ行くことはできるが、*GSCC* からは *GIN* のノードに行くことはできない。他方、*GSCC* のノードからは *GOUT* のノードにたどり着けるが、一旦 *GOUT* に行くと *GSCC* には戻れない。*GOUT* は *GSCC* からの一方通行のみ可能なノードからなるコンポーネントである。インターネット WWW では、*GOUT* と *GIN* クラスターは全ウェブページのそれぞれ約21%を占めることが知られている。

残りのクラスターは、筒、半島と島国からなる。これらをまとめて、*tendrils* という。筒 (*tube*) は *GIN* のノードから出て、*GOUT* のノードに行くパスを持つコンポーネントで、いわば、トンネルのような形をしている。半島は2種類あり、*GIN* から出て行く経路を持つコンポーネントと、*GOU* に接続するリンクを持つコンポーネントである。いずれの半島のノードからも中央大陸の *GSCC* には行けない。島は字句通り、外の大陸から行く、返ることができない非連結のコンポーネントである。これは *DCs*(*disconnected components*) と呼ばれている。リンク接続の方向性を無視して、無方向性グラフとして理解するとき、互いに到達可能なノードからなるコンポーネントをまとめて、*GWCC*(*giant weakly connected componetns*) と呼んでいる。

ネットワークの全ノードを以上の分裂したコンポーネントごとに分けて、共通部分を持たない集合 G_j に分けることができる。これらは $N = \cup_j G_j$ を満たす。このとき、 $h \neq k$ ならば、

$$\{(i, j), (j, i) : i \in G_h \wedge j \in G_k\} = \emptyset$$

となっている。

以上のネットワークに関する分類を図示すると以下のように描ける。金融ネットワークのアーキテクチャーも類似の構造をしている。

*1 以下の分類についての説明は、Broder et al.(2000) および Dorogovtsez(2001) を参照して下さい。

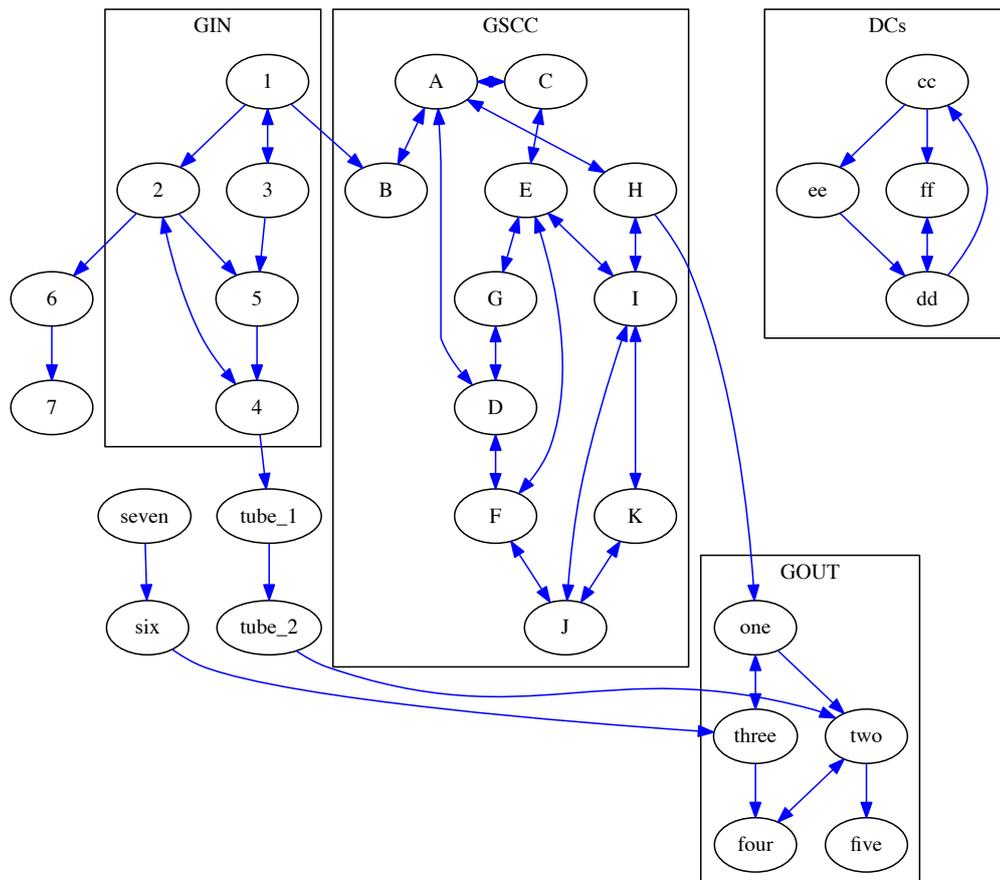


Fig.4.2 金融ネットワークのクラスター群

次数分布はネットワークの特徴を理解する上で非常に重要な役割を果たす。古典的なランダムネットワーク理論では、ポアソン分布が典型的な次数分布として利用されてきた。Broder et al(2000)の研究に代表される通り、インターネット上でのウェブ間連結では、冪乗則分布が見られる。金融ネットワークでも、稲岡 他(2003)や Soramäki et al.(2006)で指摘された通り、次数分布が冪乗則分布に従う事実が観察されている。冪乗則分布は k を次数とすると、次数 k を持つノードの確率分布が

$$p_k = Ck^{-\alpha}, \alpha > 0$$

と与えられる。ただし、 C は定数である。冪乗則分布はポアソン分布や正規分布に比べて、右側方向が大きく歪んだ (right-skewed) 分布をしている。この式の両辺の対数を取ると、

$$\ln p_k = \ln C - \alpha \ln k$$

が得られる。この式から、両軸を対数値とする平面上で、冪乗則のグラフは右下がりの直線となることが分かる。傾きの大きさは α である。以下の図は、冪乗則分布を発生するネットワークの代表例である world wide web 間のハイパーリンクのネットワークの次数分布を描いたものである。横軸及び縦軸は対数値で取られている。

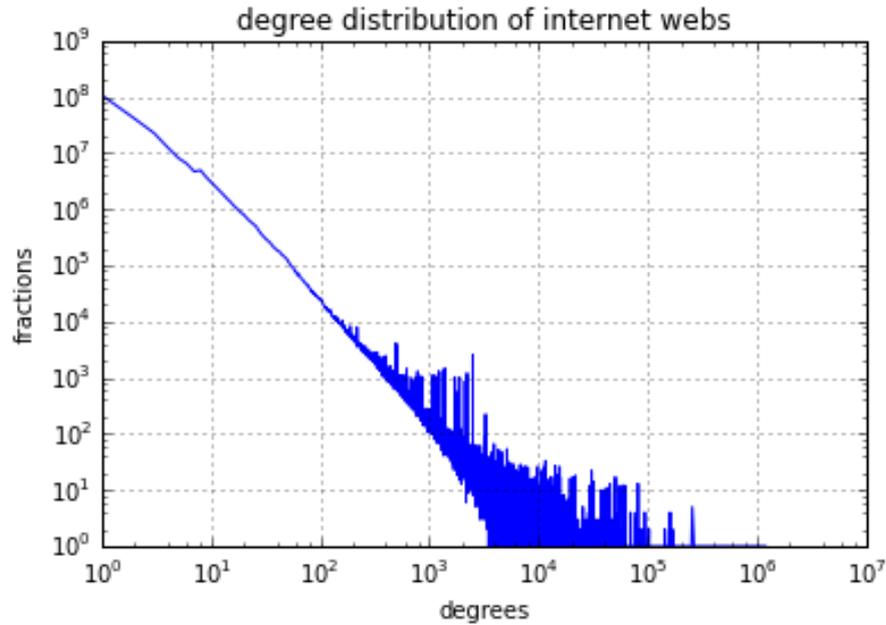


Fig.4.3 冪乗則分布の例 (world wide web hyperlinks の次数分布)

しかし、実際のデータを対数軸のグラフに描き、冪乗則分布に当てはまるか否かを検証するとき、いくつかの問題に直面する。次数が非常に大きなテールの領域では、ヒストグラムを描くためのデータ数は非常に少なくなる。つまり、データ数が非常に少ないならば、ノイズ・データの方が大きくなる可能性が生じる。上の図でもこの現象が見られる。このことの故に、描かれた分布が直線に従わない可能性が出てくる。この問題を避けるために取られる方法は、累積分布を使用することである。以下のような逆累積分布関数 (*the complement of the cumulative distribution function*)

$$P_k = \sum_{r=k}^{\infty} p_r$$

を定義する。 P_k は k 以上の次数を持つノードが占める比率である。つまり、任意に選ばれたノードが次数 k 以上を持つ確率となっている。

次数分布がテールの領域で冪乗則に従っているとすると、言い換えると、ある大きな次数 k_{min} よりも右側で冪乗則が成立つとすると、 $k \geq k_{min}$ に対して

$$P_k = C \sum_{r=k}^{\infty} r^{-\alpha}$$

が成立する。 k を実数として取り扱おうと、

$$P_k \approx \int_k^{\infty} r^{-\alpha} dr = \frac{C}{\alpha-1} k^{-(\alpha-1)}$$

なる関係式が得られる。従って、逆累積分布は指数を $-(\alpha-1)$ とする冪乗則分布に従う。この逆累積分布関数の概念を活用すれば、上記のデータ数不足に伴うエラー問題は解決する*2。多くの実証研究ではこのアプローチが採用されている。下の図は上の world wide web 間のハイパーリンクのネットワークの次数分布を逆累積分布形式で描いたグラフである。

*2 この場合でも、別の新たな問題点が存在するが、この件については省略する。Newman(2010)を参照のこと。

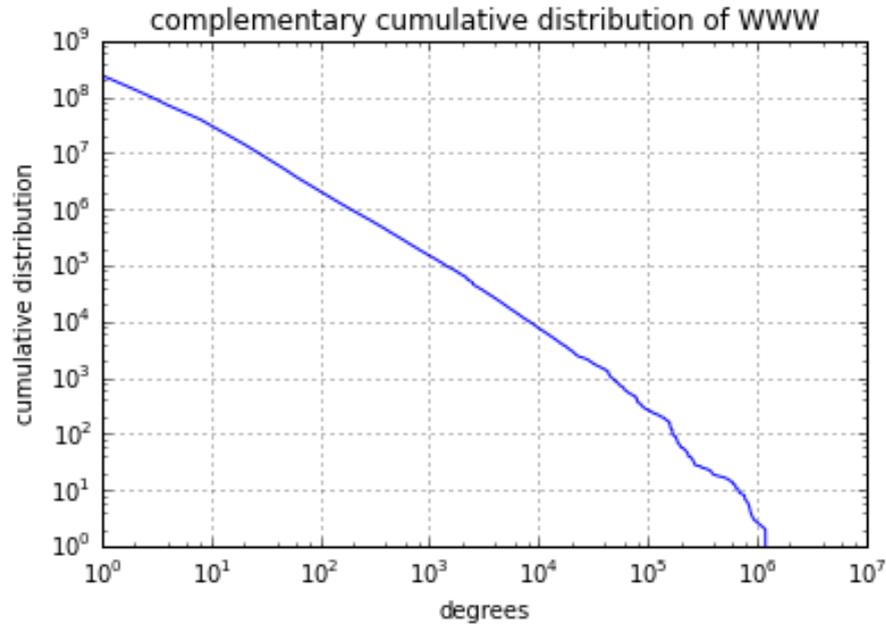


Fig.4.4 累積分布形式での次数分布の例 (world wide web hyperlinks の次数分布)

この例では、累積次数分布のグラフが必ずしも直線となっていないので、単純な回帰分析では、冪乗則分布で説明できるか否かを判断することは難しい。world wide web における hyperlinks の次数分布に関する詳細な研究については、Broder et al.(2000) を参照して下さい。ここで用いたデータは Broder 達の論文からのものである。

4.2 米国 Federal funds market

米国における連邦資金市場 (*federal funds market*) は、*Fedwire Funds Services*(*Fedwire*) によって提供されている。*Fedwire* は連邦準備システム (*Federal Reserve System*) が運営するリアルタイム・グロス決済システム (*Real-time gross settlement system: RTGS*) である。この *RTGS* の参加者 (銀行等) は 9500 社を越えている。各参加者は *Fedwire* を通して、*federal funds* の購入や売却に必要な決済、民間証券の売買、ローンの償却、不動産取引の決済などのインターバンク市場での大規模で緊急的な決済資金の手当を行う。また、*Fedwire* は、自動化決済ハウス (*automated clearing house*)、*CHIPS* 及び *CLS* などの決済ネットワークの補助的な役割も果たしている*3。

Soramäki et al/(2006) は 2004 年の *Federal funds market* のデータを用いた分析を行い、*Bech and Atalay(2008)* は 2006 年のデータを用いている。

4.3 日銀ネット

日銀ネットとは日本銀行金融ネットワークシステムのことであり、日本銀行当座預金における準備金調節にかかわるリアルタイム・グロス決済システム (*RTGS*) を提供する。稲岡 他 (2003) は 2001 年 6 月から 2002 年 1 2 月までの間における日銀当座預金間のデータを用いている。今久保・副島 (2008) は、日銀ネット

*3 The Clearing House Inter-bank Payment System(CHIPS)、Continuous Linked Settlement(CLS) のこと。

の RTGS 化以前 (1997 年) と以後 (2005 年) のデータを用いて、日銀ネットワークの特徴がどのように変化したかの比較分析を行っている。

4.4 欧州におけるインターバンク市場の例

オーストリアとイタリアにおけるインターバンク市場の例

Iori, et al.(2005)Network Analysis of the Italian Overnight Money Market, City University London を参照

参考文献

- [1] Allen, Franklin and Douglas Gale(2000), Financial Contagion, *Journal of Political Economy*, 108(1), 1-33.
- [2] Anand, Kartik, Prasanna Gai, Sujit Kapadia, Simon Brennan, and Matthew Willison(2012), A Network Model of Financial System Resilience, forthcoming to *Journal of Economic Behavior and Organization*.
- [3] Arinaminpathy, Nimalan, Sujit Kapadia, and Robert M. May(2012), Size and Complexity in Model Financial Systems, *Proc. of National Academy of Science*, 109(45), 18338-18343.
- [4] Battiston, Stefano, Domenico Delli Gatti, Mauro Gallegati, Bruce C. Greenwald, and Joseph E. Stiglitz(2012a), Default Cascades: When Does Risk Diversification Increase Stability, *Journal of Financial Stability*, 8, 138-149.
- [5] Battiston, Stefano, Domenico Delli Gatti, Mauro Gallegati, Bruce C. Greenwald, and Joseph E. Stiglitz(2012b), Liasons Dangereuses : Increasing Connectivity, Risk Sharing, and Systemic Risk, *Journal of Economic Dynamics and Control*, 36(8), 1121-1141.
- [6] Martin L. Beck and Enghin Atalay(2008), The topology of the federal funds market, *European Central Bank, Working Paper Series No.986*. (39ページ)
- [7] Callaway, Duncan S. , M. E. J. Newman, Steve H. Strogatz, and Duncan J. Watts(2000), Network Robustness and Fragility: Percolation on Random Graphs, *Physical Review Letters*, 85, 5468-5471.
- [8] Dodds, Peter Sheridan and Duncan Watts(2004), Universal Behavior in a Generalized Model of Contagion, *Physical Review Letters*, 82(21), 218701.
- [9] Dodds, Peter Sheridan and Duncan Watts(2005), A Generalized Model of Social and Biological Contagion, *Journal of Theoretical Biology*, 232, 587-604.
- [10] Gai, Prasanna and Sujit Kapadia(2010), Contagion in Financial Networks, *Proceedings of the Royal Society A*, 466(2110), 2401-2423.
- [11] Gai, Prasanna, Andrew G. Haldane, and Sujit Kapadia(2011), Complexity, Concentration and Contagion, *Journal of Monetary Economics*, 58, 453-470
- [12] Holdane, Andrew G.(2009), Rethinking the Financial Network, Bank of England, Working Paper.
- [13] Haldane, Andrew G. and Robert M. May(2011), Systemic Risk in Banking Ecosystems, *Nature*, 469, 351-355.
- [14] López-Pintado, Dunia(2006), Contagion and Coordination in Random Networks, *Int. J. Game Theory*, 34, 371-381.
- [15] López-Pintado, Dunia(2008), Diffusion in Complex Social Networks, *Games and Economic Behavior*, 62, 573-590.
- [16] May, Robert M. and Nimalan Arinaminpathy(2010), Systemic Risk: the Dynamics of Model Banking Systems, *Journal of the Royal Society Interface*, 7, 823-838.
- [17] Newman, M. E. J.(2002), The Spread of Epidemic Disease on Networks, *Physical Review E*, 66, 016128.
- [18] Newman, M. E. J. , Steven H. Strogatz, and Duncan J. Watts(2001), Random Graph with Arbitrary

- Distributions and their Applications, *Physical Review E*, 64, 7332-7342.
- [19] Nier, Elrend, Jing Yang, Tanju Yorulmazer and Amdeo Alentorn(2007), Network Models and Financial Stability, *Journal of Economic Dynamics and Control*, 31, 2033-2060.
- [20] Pastor-Satorras, Romuald and Alessandro Vespignani(2001), Epidemic Spreading in Scale-Free Networks, *Physical Review Letters*, 86, 3200.
- [21] Roukny, Tarik, Hugues Bersini, Hugues Pirotte, Guido Caldarelli, and Stefano Battiston(2013), Default Cascades in Complex Networks: Topology and Systemic Risk, *Scientific Reports*, 3, 1-8.
- [22] K. Soramäki, M. L. Bech, M. J. Arnold, R. J. Glass, and W. E. Beyeler(2006), The topology of interbank payment flows, *Federal Reserve Bank of New York, Staff Report no.243*. (13 ページ)
- [23] Vega-Redondo, Fernando(2007), *Complex Social Networks*, Cambridge University Press.
- [24] Watts, Duncan J. (2002), A Simple Model of Global Cascades on Random Networks, *Proc. of National Academy of Science*, 99(9), 5766-5771.
- [25] 増山 幸一 (2014), 「社会的ネットワークにおけるイノベーションの拡散過程」、mimeo、明治学院大学経済学部.
- [26] 稲岡創、二宮拓人、谷口健、高安秀樹 (2003), 「金融機関の資金取引ネットワーク」、日本銀行金融市場局、ワーキングペーパー. (28 ページ)
- [27] 今久保圭・副島豊 (2008), 「コール市場の資金取引ネットワーク」、日本銀行『金融研究』. (54 ページ)
- [28] Geroge Akerlof and Robert Shiller(2008), 『アニマルスピリット：人間の心理がマクロ経済を動かす』東洋経済新報社、第7章、第11章 (60 ページ)
- [29] 増山 幸一 (2015), 「講義ノート ネットワーク理論入門」
- [30] 増山 幸一 (2015), 「講義ノート 大規模ネットワークのトポロジーと次数分布」