講義ノート
経済学のための確率過程論入門

増山　幸一
明治学院大学経済学部

2006 年 10 月

1　始めに

Frisch や Slutzky らによる景気循環論に見られるとおり、確率過程モデルを用いて経済分析を行う方法は、最近始められたものではなく、1930 年代にまで遡る．周知の通り、時系列分析や計量経済学では確率過程論の知識は必須のものであったし、それ以外の経済学の多くの領域でも確率過程に基づくモデル化が重要な役割を果たすようになっている．例えば、近年急速な発達を見せているファイナンス理論では、資産価格の変動を確率微分方程式によって表現して、これに基づいてブラック=ショールズ方程式などから、オプション価格を計算するという手続きが取られる．リアル・オプション・アプローチでは、実物資本への投資から得られるであろう将来収益の変動が幾何的拡散過程のような確率微分方程式で表現できることを前提とし、その上で、動的最適化問題がダイナミック・プログラミングの手法あるいはポートフォリオ複製手法を用いて解くという手続きになっている．産業組織論さらにはゲームの理論でも確率過程モデルが使用されるようになっている．

また、1990 年代以降、複雑系の経済学や経済物理学などに顕著に見られるように、経済現象を非線形確率過程モデルを用いて分析する研究が進展している．経済分析で常套手段であった代表的経済主体のモデル化を回避して、異質な多数の経済主体の相互作用からマクロ経済現象などを分析する研究も進展している．最近のこのような研究で主要な役割を果たしている確率過程モデルはいわゆる飛躍型マルコフ過程と呼ばれる確率過程であり、とりわけ非線形マルコフ過程として定式化できる確率過程モデルである．さらに、マルコフ過程の確率分布の動的変動を支配する微分方程式、いわゆるチャップマン・コルモゴロフ方程式あるいはマスター方程式がモデル分析上で主要な役割を担っている．近年進展している研究アプローチは、非線形確率力学系による経済現象のモデル化とでも要約できるものである．

この講義ノートでは、経済現象の確率力学系モデルを理解するために必要な、確率過程論の基礎概念を説明する．確率過程を数学的にモデル化するときに必須となる基本的な概念や手法を、必要最小限レベルで、説明することにする．本稿では、したがって、確率過程に関わる知識がない経済学部の 3，4 年次学生および経済学専攻の大学院生に対して確率過程論の基礎的な知識を導入することを主目的とする．第 1 節で確率過程の簡単な説明を行い、第 2 節で、最もシンプルな確率過程であるマルコフ連鎖を説明している．第 3 節では、マルコフ型飛躍過程、とりわけ出生死滅過程を主として説明する．そこでは、マルコフ飛躍過程に関わる諸概念、チャップマン・コルモゴロフの前向き方程式、後向きの方程式 (統計力学でいうところのマスター方程式) の導出、そしてそれらの方程式の解法などが説明されている．第 4 節で、確率変数が連続値を取るマルコフ過程、

いわゆる拡散過程を取り扱っている．拡散過程の定義を導入したうえで、拡散過程の典型例であるブラウン運動などを説明している．フォッカー・プランクの方程式を導出し、最後に、確率微分方程式と伊藤微分の公式を説明している．

前提とする数学的知識は簡単な代数演算と微積分とする．とはいえ、チャップマン・コルモゴロフ方程式 (マスター方程式) などは常微分方程式あるいは偏微分方程式として定式化されているので、微分方程式を解くという作業が必要となる．付録 (Appendix) に、常微分方程式の簡単な解法と偏微分方程式の特性曲線による解法を簡潔に説明している．微分方程式について予備知識がない諸君はこの付録を参照してください．なお、確率論の知識はそれほど必要とされないが、確率論の予備知識をまったく持ち合せていない読者は、確率論の簡単な教科書を参照してください*1.

目次

*1 たとえば、拙著「講義ノート　経済学のための確率論入門」を参照してください．この講義ノートは『経済研究』(明治学院大学)138 号、2007 年 3 月発行に掲載されています．

2　確率過程

2.1　主要な確率分布の例

確率過程の説明で頻繁に登場する重要な確率分布の例をいくつかあげることにする．

例 2.1 (2 項分布 binomial distribution)
コインを投げたときのように、各試行が成功と失敗の 2 種類のみに結果するとき、この試行を n 回行うとする．n 回の試行のうち成功の回数を S_n と表記する．S_n は確率変数である．S_n がとり得る値は、$0, 1, 2, ..., n$ である．だから、S_n は整数値確率変数でもある．各試行で成功する確率を p とするとき、

$$P(S_n = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k},\ k = 1, 2, ..., n.$$

よって、確率密度関数は

$$f(x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x},\ x = 1, 2, ..., n \tag{1}$$

となる．このような確率密度関数を持つ分布を、パラメターが n と p である二項分布という．

例 2.2 (ポアッソン分布 Poisson distribution)
λ を正の実数とする．パラメータ λ を持つポアッソン分布の確率密度は以下のように定義される．

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}, & x = 0, 1, 2, ..., \\ 0, & \text{その他の場合} \end{cases}$$

指数関数のテイラー級数展開

$$e^\lambda = \sum_{x=0}^{\infty} \frac{\lambda^x}{x!},$$

を用いれば、確率密度関数の条件

$$\sum_{x=0}^{\infty} f(x) = 1$$

が満たされることが確認できる．n と p をパラメターとする 2 項分布において、条件 $\lambda = np$ を満たしながら、p をゼロに、n を無限大に変化させていくと、パラメター λ のポアッソン分布に収束することが知られている．

例 2.3 (2 項分布の期待値)
X をパラメータ n と p を持つ 2 項分布に従う確率変数であるとする．確率密度関数は $f(x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}, x = 0, 1, 2, ..., n$ である．期待値を求めてみよう．

$n = 1$ のときを最初に考える．1 回の試行で成功する ($X = 1$ のとき) 確率は p、成功しない ($X = 0$ のとき) 確率は $1 - p$ である．よって、

$$EX = 0 \cdot f(X = 0) + 1 \cdot f(X = 1) = p,$$

となる．1 回の試行が成功する確率が平均値となる．$n > 1$ のとき、X は値 $\{0, 1, 2, \ldots, n\}$ を取ると仮定する．したがって、

$$EX = \sum_{j=0}^{n} j \binom{n}{j} p^j (1-p)^{n-j}.$$

この計算を行うと、

$$EX = np, \tag{2}$$

が得られる[*2]．

確率変数の和の期待値は期待値の和になるという性質を用いて、2 項分布の平均値を導出することもできる．$X_1, X_2, \cdots, X_n$ が互いに独立な、成功の (値 1 を取る) 確率が p であるベルヌーイ試行の確率変数であるとする．$S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ と置けば、S_n は 2 項分布を持つ．既に、$EX_i = p, (i = 1, 2, \ldots, n)$ であることは知られている．よって、

$$ES_n = E(X_1 + X_2 + \cdots + X_n) = \sum_{i=1}^{n} EX_i = np.$$

例 2.4 (ポアッソン分布の期待値)
パラメータ λ を持つポアッソン分布の確率密度は $f(x) = \lambda^x e^{-\lambda}/x!$ である．この分布の期待値は

$$EX = \sum_{j=1}^{\infty} j \frac{\lambda^j}{j!} e^{-\lambda} = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\lambda^j}{(j-1)!} e^{-\lambda} = \lambda e^{-\lambda} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\lambda^j}{j!} = \lambda e^{-\lambda} e^{\lambda} = \lambda,$$

と計算できる．

例 2.5 (2 項分布の分散)
$ES_n = np$ であることは分かっている．独立な確率変数の和の分散に関する関係式から、

$$\mathrm{Var}S_n = \mathit{Var}(X_1 + X_2 + \cdots + X_n) = \mathrm{Var}X_1 + \mathit{Var}X_2 + \cdots + \mathit{Var}X_n = n\mathit{Var}X_1.$$

$X_1 = 0, 1$ なので、$X_1^2 = X_1$ である．だから、$EX_1^2 = EX_1 = p$ となる．よって、

$$\mathrm{Var}X_1 = EX_1^2 - (EX_1)^2 = p - p^2 = p(1-p)$$

が成立する．したがって、2 項分布の分散は $\mathit{Var}S_n = np(1-p)$ となる．

ポアッソン分布の分散は各自読者が計算してください．X がパラメータ λ を持つポアッソン分布であるとき、$EX = \lambda, \mathrm{Var}X = \lambda$ になることを確認してください．

以下に連続確率変数の主要な例をあげる．

例 2.6 (正規分布 normal distribution)
平均値が μ、分散が σ^2 であるような正規分布の密度関数は

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\},$$

[*2] この計算の詳細については、Hoel, Port and Stone,*An Introduction to Probability Theory* を参照してください．

で与えられる．確率変数 V の自然対数が正規分布しているとき、変数 V は対数正規分布 *(lognormal distribution)* をしているという．変数 X が平均値 μ、分散 σ^2 であるような正規分布をしているならば、$V = e^X$ は対数正規分布をしている．このとき、V の密度関数は

$$f(v) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma v}\exp\{-\frac{(\ln v - \mu)^2}{2\sigma^2}\},\ v \geq 0$$

となる．平均値と分散は

$$EV = \exp\{\mu + \frac{\sigma^2}{2}\},\ VarV = \exp\{2(\mu + \frac{\sigma^2}{2})\}[\exp\{\sigma^2\} - 1]$$

である．

例 2.7 (指数分布 exponential distribution)
確率密度関数が

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}, x \geq 0; \quad f(x) = 0, x < 0$$

であるとき、非負の確率変数 x はパラメター λ の指数分布 *(exponential distribution)* をしているという．対応する分布関数は

$$F(x) = 1 - e^{-\lambda x}, x \geq 0$$

となる．平均値と分散は

$$EX = \frac{1}{\lambda},\ VarX = \frac{1}{\lambda^2}$$

で与えられる．

例 2.8 (ガンマ分布 gamma distribution)
パラメター $\alpha > 0$ と $\lambda > 0$ を持つガンマ密度関数 $\Gamma(x; \alpha, \lambda)$ は

$$\Gamma(x; \alpha, \lambda) = \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\lambda x}, x > 0,$$

で与えられる．ただし、$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty x^{\alpha-1}e^{-x}dx$ である．α 個の確率変数 $\{Y_1, Y_2, .., Y_\alpha\}$ が同一のパラメター値 λ を持つ指数分布であるとき、確率変数の和 $X = Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_\alpha$ は密度関数 $\Gamma(x; \alpha, \lambda)$ を持つガンマ分布をする．

2.2 確率過程の定義

あるシステムの状態は時間の経過と共に変動するとする．このとき、システムの状態 X は時間と共に変化するので、時間 t をパラメターとして、X_t、あるいは $X(t)$ のように表現できる．パラメター t が取り得る値の集合を T で表記する．集合 T は離散的な点列からなる集合であっても、実数の閉区間であってもかまわない．時刻 t でのシステムの状態 X_t がある確率分布に従って生起するとき、$\{X_t, t \in T\}$ を確率過程と呼ぶ．システムの状態は確率法則に従って変化するので、明らかに X_t は確率変数になっている[*3]．

[*3] 厳密に表現すると、以下のようになる． 集合 A が状態空間 $\mathcal{S}$ の任意の部分集合とするとき、各 $t \in T$ に対して、集合 $\{X_t(\omega) \in A\}$ は全体集合 Ω の部分集合である．この部分集合から生成される集合族 (σ 代数族) を $\mathcal{F}_T$ とする．確率測度 P がこの集合族 $\mathcal{F}_T$ の上に定義できるとき、X_t は確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}_T, P)$ 上で定義される確率変数である．つまり、$X_t : \Omega \to \mathcal{S}$ $(X_t \in \mathcal{S}, t \in T)$ である

このように確率過程は、ある確率空間上に定義された確率変数の系 $\{X_t, t \in T\}$ によって定義される．パラメターの集合 T が、$(-\infty, \infty)$ の部分区間で正の長さを持つとき、確率過程は連続パラメター過程と言われる．他方、T が、整数のような可算個の要素からなるとき、離散パラメター過程と言われる．離散パラメター過程のとき、通常パラメター集合は $T = \{0, 1, 2...\}$ と表現される．以下で定義する推移確率と確率測度の表記に混乱を起こさないために、確率測度の表記として P の代わりに Pr を用いる．

システムの状態 X のとり得る値は一般的には実数空間の部分集合である．複素数空間であってもかまわないが、システムが取り得る状態の集合を状態空間という．状態空間を記号 $\mathcal{S}$ で表現する．状態空間 $\mathcal{S}$ が $\{0, 1, 2, \ldots\}$ あるいは $\{0, \pm 1, \pm 2, , \ldots\}$ であるとき、離散的確率過程という．$\mathcal{S} = (-\infty, \infty)$ であるとき、実数値確率過程と言う．$\mathcal{S}$ が k 次元ユークリッド空間のとき、k 次元ベクトル値確率過程という．

各 $t \in T$ に対して X_t の実現値を対応させると、t の関数が得られる．これを確率過程 $\{X_t, t \in T\}$ の標本関数 (sample function) という．例えば、サイコロを投げ続けるとき、n 番目に出た目の数を X_n とすると、$X_n, n = 1, 2, \ldots,$ の標本関数は 値 $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ の中からどれか一つをとって作った数列となる．

例 2.9 (ウィーナー過程　Wiener process)
次の性質を持つ確率過程をウィーナー過程という．

(i). $0 \leq t_0 < t_1 < \cdots < t_n$ なる任意の $\{t_k\}$ に対して、

$$X_{t_1} - X_{t_0}, X_{t_2} - X_{t_1}, \ldots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$$

は独立である．

(ii). $\Pr(X_t - X_s \leq x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi B(t-s)}} \displaystyle\int_{-\infty}^{x} \exp\{-\frac{u^2}{2B(t-s)}\} du, \quad (t > s, B > 0).$

(iii). $X_0 \equiv 0.$

この確率過程は R. ブラウンによって観測された液体の中の微粒子の不規則運動の数学的モデルとして、N. ウィーナーによって定式化されたので、この名称を持つ．また、ウィーナー過程は、その現象を観察した発見者の名前から、ブラウン運動とも呼ばれている．なお、定数 B はブラウン運動で観測された実数値である．ウィーナー過程 (ブラウン運動) の平均値と分散は

$$EX_t = 0, \mathrm{Var} X_t = Bt,$$

となる．

例 2.10 (ポアッソン過程　Poisson process)
以下の性質をもつ確率過程をポアッソン過程という．

(i). $0 \leq t_0 < t_1 < \cdots < t_n$ なる任意の $\{t_k\}$ に対して、

$$X_{t_1} - X_{t_0}, X_{t_2} - X_{t_1}, \ldots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$$

は独立である．

(ii). $\Pr(X_t - X_s = k) = e^{-\lambda(t-s)} \dfrac{\{\lambda(t-s)\}^k}{k!}, \quad k = 0, 1, 2, ..., (t > s, \lambda > 0)$

(iii). $X_0 \equiv 0.$

ポアッソン過程の平均値と分散が

$$EX_t = \lambda t, \quad \mathrm{Var} X_t = \lambda t, \tag{3}$$

となることは容易に分かる．時間区間 $(0,t]$ にある特定の事象が起こった回数を $N(t)$ で表記することにする．例えば、放射線物質から放射される α 粒子の数、電話のベルがなった回数、交差点を通過する車の数、窓口に到着した客の数、など．$N(t)$ のグラフを時間を横軸にした平面上に描くと、階段関数となっている．ポアッソン過程はこうした確率過程を記述するモデルとして利用されている．

2.3 確率過程の分類

以下に確率過程の重要な分類方法を説明する．

1. マルコフ過程 (Markov processes)
任意の $t_1 < t_2 < \cdots < t_n < t$ および任意の $x_1, x_2, \cdots, x_n, x$ に対して、

$$\Pr\{X_t \leq x | X_{t_1} = x_1, X_{t_2} = x_2, \ldots, X_{t_n} = x_n\} = \Pr\{X_t \leq x | X_{t_n} = x_n\}$$

が成り立つとき、$\{X_t, t \in T\}$ をマルコフ過程であるという．マルコフ過程は現在の状態が与えられると、将来状態の生起確率は現在の状態にのみ依存して、過去の状態には依存しない過程である．確率過程の多くはマルコフ過程として定式化することができる．ウィーナー過程やポアッソン過程は明らかにマルコフ過程である．さらに、以下に説明する出生・死滅過程やランダム・ウォークもマルコフ過程の例である．

$$P(x, t_n; y, t_{n+1}) = \Pr\{X(t_{n+1}) = y | X(t_n) = x\}$$

を推移確率という．推移確率 $P(x, t_n; y, t_{n+1})$ が時間差 $t_{n+1} - t_n$ のみに依存するとき、このマルコフ過程は時間的に一様であるといい、定常なマルコフ過程という．

2. 加法過程 (Processes with independent increments)
任意の $t_1 < t_2 < \cdots < t_n$ に対して、

$$X_{t_2} - X_{t_1}, X_{t_3} - X_{t_2}, \cdots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$$

が独立であるとき、$\{X_t\}$ を加法過程 (独立増分をもつ過程) という．ウィーナー過程やポアッソン過程は加法過程の代表的な具体例である．

3. マーチンゲール (Martingales)
$\{X_t\}$ を $E\{|X_t|\} < \infty$ なる実数値確率過程とする．任意の $t_1 < t_2 < \cdots < t_n < t$ および任意の $a_1, a_2, \cdots, a_n$ に対して、

$$E(X_t \mid X_{t_1} = a_1, \cdots, X_{t_n} = a_n) = a_n$$

が成り立つとき、X_t はマーチンゲールであるという．マーチンゲールの例は、効率的な資本市場での株価の変動などに見られる．

3 離散型マルコフ連鎖

3.1 推移関数

時間パラメターの集合が離散的で、$T = \{0, 1, 2, \cdots\}$ と表現でき、状態空間が有限個あるいは可算無限個の要素からなる集合であるとき、離散時間マルコフ連鎖 (discrete-time Markov chains) という．この節では、$\mathcal{S} = \{0, 1, 2, \cdots\}$ であるようなマルコフ過程を対象とする．時刻 n の状態が x_n であるとき、時刻 $n+1$ で状態が x_{n+1} である条件付確率

$$P(n, x_n; n+1, x_{n+1}) \equiv \Pr\{X_{n+1} = x_{n+1} | X_n = x_n\}$$

を推移確率 (transition probability) という．推移確率 $P(n, x_n; n+1, x_{n+1})$ が n に関係しないとき、定常な推移確率を持つという．マルコフ過程の定常な推移確率を

$$P_{x,y} \equiv P(n, x; n+1, y) = P(0, x; 1, y)$$

と定義する．$P_{x,y}$ はある時刻に状態 x にあったとき、次の時刻に状態 y にある確率を表現している．明らかに、

$$P_{x,y} \geq 0, \quad x, y \in \mathcal{S}, \tag{4}$$

$$\sum_{y=0}^{\infty} P_{x,y} = 1, \quad x \in \mathcal{S} \tag{5}$$

が成立する．条件 (4)(5) を満たす関数 $P_{x,y}$ を推移関数という (推移確率とも言う)．

$$\pi_0(x) = \Pr(X_0 = x), \quad x \in \mathcal{S},$$

と定義される関数 π_0 はマルコフ連鎖の初期分布を表現する．初期分布は

$$\pi_0(x) \geq 0, \quad x \in \mathcal{S}$$

$$\sum_x \pi_0(x) = 1$$

を満たす．

$\{X_0, X_1, \cdots X_n\}$ の結合分布は推移関数と初期分布関数によって表現することができる．例えば、X_0, X_1 の結合分布は

$$\Pr(X_0 = x_0, X_1 = x_1) = \Pr(X_0 = x_0) \Pr(X_1 = x_1 | X_0 = x_0) = \pi_0(x_0) P_{x_0, x_1}$$

と計算できる．また、

$$\begin{aligned} \Pr(X_0 = x_0, X_1 = x_1, X_2 = x_2) &= \Pr(X_0 = x_0, X_1 = x_1) \Pr(X_2 = x_2 | X_1 = x_1, X_0 = x_0) \\ &= \pi_0(x_0) P_{x_0, x_1} \Pr(X_2 = x_2 | X_1 = x_1) \\ &= \pi_0(x_0) P_{x_0, x_1} P_{x_1, x_2} \end{aligned}$$

が成立する．これらの計算から類推される通り、

$$\Pr(X_0 = x_0, \cdots, X_n = x_n) = \pi_0(x_0) P_{x_0,x_1} \cdots P_{x_{n-1},x_n} \tag{6}$$

である．

例 3.1 (ランダム・ウォーク random walk)
$\{\xi_1, \xi_2, \ldots\}$ を共通の密度関数 $f(\xi_i)$ をもつ整数値確率変数とする．X_0 を各 ξ_i とは独立な整数値確率変数とし、

$$X_n = X_0 + \xi_1 + \xi_2 + \cdots + \xi_n$$

と定義する．数列 $\{X_n、n \geq 0\}$ はランダム・ウォークと呼ばれる確率過程である．ランダム・ウォークは明らかにマルコフ連鎖であり、推移確率は

$$P_{x,y} = \Pr(X_{n+1} = y | X_n = x) = \Pr(\xi_{n+1} = y - x) = f(y - x)$$

である．

ξ_i のとり得る値が $\{-1, 0, 1\}$ であるような単純なランダム・ウォークを考えよう．$f(1) = p, f(-1) = q, f(0) = r$ であるとする．ただし、$p + q + r = 1, p > 0, q > 0, r > 0$ である．推移確率は

$$P_{x,y} = \begin{cases} p, & y = x + 1, \\ q, & y = x - 1, \\ r, & y = x, \\ 0, & \text{その他の場合} \end{cases}$$

となる．

例 3.2 (出生死滅連鎖 birth and death chains)
推移確率が以下のように与えられているとする．

$$P_{x,y} = \begin{cases} p_x, & y = x + 1, \\ q_x, & y = x - 1, \\ r_x, & y = x, \\ 0, & \text{その他の場合} \end{cases}$$

ただし、$p_x + q_x + r_x = 1, p_x > 0, q_x > 0, r_x > 0$ とする．このような推移確率を持つマルコフ連鎖が出生死滅過程と呼ばれる理由は、状態が x から $x+1$ への変化することが生まれること、状態 x が $x-1$ に変化することが死滅することに対応するからである．出生、死滅の確率 p_x, q_x, r_x は現在の状態 x に依存している．$p_0 = 1(q_0 = 0, r_0 = 0)$ が成立するとき、状態 *0* は反射壁であるという．状態 *0* が反射壁であるときは、状態 *0* の状態は維持できない．反対に、$r_0 = 1(p_0 = 0, q_0 = 0)$ であるとき、状態 *0* は吸収壁であるという．状態 *0* が吸収壁であるならば、一旦状態 *0* になると、その状態が永遠に維持される．

例 3.3 (分岐連鎖 branching chains)
中性子やバクテリアは、一つの粒子が分裂して同じ種類の粒子を生じる．初期に存在する粒子を *0* 世代の粒子とする．n 世代の粒子が分裂してできた粒子を $n+1$ 世代の粒子と呼ぶことにする．X_n を n 世代の粒子の数

とする．各粒子は ξ 個の次世代の粒子を生み出すとする．ξ は密度関数 f に従う整数値確率変数である．このとき、X_n はマルコフ連鎖を形成する．状態 0 は吸収壁である．推移確率は

$$P_{x,y} = \Pr(\xi_1 + \xi_2 + \cdots + \xi_x = y)$$

で与えられる．特に、$P_{1,y} = f(y)$ である．

3.2 チャップマン・コルモゴロフの方程式

$\{X_n, n \geq 0\}$ を推移関数 $P_{x,y}$ をもつ状態空間 $\mathcal{S}$ 上のマルコフ連鎖とする．ここで、n 階 (n 次) 推移関数 (n-step transition function) の計算方法を説明する．

$$\begin{aligned}
&\Pr(X_{n+1} = x_{n+1}, \cdots, X_{n+m} = x_{n+m} | X_0 = x_0, X_1 = x_1, \cdots, X_n = x_n) \\
&\quad = \frac{\Pr(X_0 = x_0, \cdots, X_{n+m} = x_{n+m})}{\Pr(X_0 = x_0, \cdots, X_n = x_n)} \\
&\quad = \frac{\pi_0(x_0) P_{x_0,x_1} \cdots P_{x_{n+m-1},x_{n+m}}}{\pi_0(x_0) P_{x_0,x_1} \cdots P_{x_{n-1},x_n}} \\
&\quad = P_{x_n,x_{n+1}} \cdots P_{x_{n+m-1},x_{n+m}}
\end{aligned}$$

である．さらに、マルコフ性から、$\mathcal{S}$ の部分集合 $A_0, \cdots, A_{n-1}$ に対して、

$$\begin{aligned}
&\Pr(X_{n+1} = x_{n+1}, \cdots, X_{n+m} = x_{n+m} | X_0 \in A_0, \cdots, X_{n-1} \in A_{n-1}, X_n = x_n) \\
&\qquad = P_{x_n,x_{n+1}} \cdots P_{x_{n+m-1},x_{n+m}}
\end{aligned}$$

が成立するので、$B_1, \cdots, B_m$ を $\mathcal{S}$ の部分集合とするとき、以下の関係が成立する．

$$\begin{aligned}
&\Pr(X_{n+1} \in B_1, \cdots, X_{n+m} \in B_m | X_0 \in A_0, \cdots, X_{n-1} \in A_{n-1}, X_n = x) \\
&\quad = \sum_{y_1 \in B_1} \cdots \sum_{y_m \in B_m} P_{x,y_1} P_{y_1,y_2} \cdots P_{y_{m-1},y_m}.
\end{aligned}$$

上の式で $B_1 = \cdots = B_{m-1} = \mathcal{S}$ と $B_m = \{y\}$ とおくと、状態 x から m ステップで状態 y に到達する確率は

$$\begin{aligned}
&\Pr(X_{n+m} = y | X_0 \in A_0, \cdots, X_{n-1} \in A_{n-1}, X_n = x) \\
&\quad = \sum_{y_1 \in \mathcal{S}} \cdots \sum_{y_{m-1} \in \mathcal{S}} P_{x,y_1} P_{y_1,y_2} \cdots P_{y_{m-1},y}
\end{aligned}$$

と表現できることが分かる．状態 x から m ステップで状態 y に到達する確率を $P_{x,y}(m)$ と表現する．つまり、

$$\begin{aligned}
P_{x,y}(m) &= \Pr(X_{n+m} = y | X_n = x) = \Pr(X_m = y | X_0 = x) \\
&= \sum_{y_1 \in \mathcal{S}} \cdots \sum_{y_{m-1} \in \mathcal{S}} P_{x,y_1} P_{y_1,y_2} \cdots P_{y_{m-1},y}, \quad m \geq 2.
\end{aligned} \tag{7}$$

ただし、$P_{x,y}(1) = P_{x,y}$ であり、そして、

$$P_{x,y}(0) = \begin{cases} 1, & x = y, \\ 0, & x \neq y, \end{cases}$$

である．

n 階推移関数は、

$$\begin{aligned} P_{x,y}(n+m) &= \Pr(X_{n+m}=y|X_0=x) \\ &= \sum_{z\in\mathcal{S}} \Pr(X_n=z|X_0=x)\Pr(X_{n+m}=y|X_n=z) \\ &= \sum_{z\in\mathcal{S}} P_{x,z}(n)\Pr(X_{n+m}=y|X_n=z) \end{aligned}$$

という関係を満たす．すなわち、

$$P_{x,y}(n+m) = \sum_{z\in\mathcal{S}} P_{x,z}(n)P_{z,y}(m). \tag{8}$$

これをチャップマン-コルモゴロフの方程式 (Chapman-Kolmogorov equation) という．

こうして、初期分布と推移関数が与えられると、マルコフ連鎖の n ステップ後の状態分布が完全に計算できることになる．

$$\Pr(X_n=y) = \sum_{x\in\mathcal{S}} \Pr(X_0=x, X_n=y) = \sum_{x\in\mathcal{S}} \Pr(X_0=x)\Pr(X_n=y|X_0=x)$$

だから、

$$\Pr(X_n=y) = \sum_{x\in\mathcal{S}} \pi_0(x)P_{x,y}(n) \tag{9}$$

が成立する．

3.3 簡単なマルコフ連鎖のモデル

例 3.4 (在庫モデル inventory model)

ある商品の需要量は整数値ランダム変数で表現されるとする．ランダム変数 ξ_n は第 n 期における商品に対する需要量を表す．ここで、$n=0,1,\ldots,$ である．ランダム変数 ξ_n の確率分布を

$$\Pr(\xi_n=k)=p_k, k=0,1,2,\ldots,$$

とする．ただし、$p_k \geq 0$ および $\sum_{k=0}^{\infty}=1$ が満たされている．各期の期末に在庫水準が最低水準 s を下回っているのであれば、在庫水準が S に回復するように商品の購入発注が行われ、在庫の積み増しが行われる．反対に、期末の在庫水準が在庫水準 S を超えているときには、在庫積み増しのための商品発注は行われない．n 期の期末での *(在庫調整以前の)* 在庫水準を X_n と表現すると、在庫水準 X_n の取り得る値は

$$X_n = S, S-1, \ldots, +1, 0, -1, -2, \ldots,$$

である．在庫水準がマイナスとなっているときは、実現できなかった需要量を示しており、期末での在庫調整の段階で解消されるとする．上記の在庫政策に従えば、在庫水準を表現する確率変数 X_n の変動は

$$X_{n+1} = \begin{cases} X_n - \xi_{n+1}, & s < X_n \leq S \text{ のとき}, \\ S - \xi_{n+1}, & X_n \leq s \text{ のとき}, \end{cases}$$

に従う．各期の需要量 ξ_n が独立であれば、在庫水準 X_n は以下で計算される推移確率を持つマルコフ連鎖となる．推移確率関数は

$$P_{x,y} = \Pr(X_{n+1}=y|X_n=x) = \begin{cases} \Pr(\xi_{n+1}=x-y), & s < x \leq S \text{ のとき}, \\ \Pr(\xi_{n+1}=S-y), & x \leq s \text{ のとき}, \end{cases}$$

に従う．

数値例を考える．スペア部品の在庫モデルで、需要量が $0, 1, 2$ であり、確率分布が

$$\Pr(\xi_{=}0) = 0.5, \quad \Pr(\xi_n = 1) = 0.4, \quad \Pr(\xi_n = 2) = 0.1$$

のケースを考えよう．さらに、$s = 0, S = 2$ とする．このとき、各期首で在庫水準は $2, 1$ のいずれかであり、X_n の取り得る値は $2, 1, 0, -1$ となる．推移確率のいくつかを計算すると、例えば、$P_{1,0}$ は

$$P_{1,0} = \Pr(X_{n+1} = 0 | X_n = 1) = \Pr(\xi_{n+1} = 1) = 0.4$$

と計算できる．また、

$$P_{1,1} = \Pr(X_{n+1} = 1 | X_n = 1) = \Pr(\xi_{n+1} = 0) = 0.5$$

となる．こうした計算結果をマトリックスの形式で表現すると、

$$\mathbf{P} = \begin{array}{c} \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} -1 & 0 & 1 & 2 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0.1 & 0.4 & 0.5 \\ 0 & 0.1 & 0.4 & 0.5 \\ 0.1 & 0.4 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0.1 & 0.4 & 0.5 \end{pmatrix} \end{array}$$

となる．

例 3.5 (遺伝子モデル Markov chains in genetics)

S. Wright によって提案された遺伝子淘汰のモデルを考える．生物集団の遺伝的構成において、*2* 種類の対立遺伝子 a, A が存在している．*1* 倍体生物を考える．遺伝子 a をもつ個体数と遺伝子 A を持つ個体数の総計が集団のサイズとなる．集団のサイズを $2N$ とする．つまり、遺伝子 a をもつ個体数と、遺伝子 A をもつ個体数の総和が $2N$ である．次世代の遺伝的構成は $2N$ 回の独立なベルヌーイ試行に従って決定されるとする．遺伝子 a をもつ個体数が x であるとき、各試行において遺伝子 a が選択される確率は

$$p_x = \frac{x}{2N}$$

となり、各試行ののうち遺伝子 A が選択される確率は

$$q_x = 1 - \frac{x}{2N}$$

であると仮定する．n 世代の集団において遺伝子 a を持つ個体数を X_n と表現する．この X_n は確率変数でマルコフ連鎖を構成する。マルコフ連鎖の状態空間は

$$\mathcal{S} = \{0, 1, 2, \ldots, 2N\}$$

である．推移確率は *2* 項分布に従い、

$$\Pr(X_{n+1} = y | X_n = x) = P_{x,y} = \begin{pmatrix} 2N \\ y \end{pmatrix} p_x^y q_x^{2N-y}, q; x, y = 0, 1, \ldots, 2N \tag{10}$$

で与えられる．

このマルコフ連鎖では状態 $X_n = 0$ と $X_n = 2N$ は吸収状態である．つまり、一旦、集団の遺伝的構成が遺伝子 A のみからなる $X_n = 0$ に到達すると、その状態が以後繰り返される．また、集団の遺伝的構成が遺伝子

a のみからなる $X_n = 2N$ に到達すると、その状態が永続する．このような吸収状態に到達する確率を求めることができる．

より一般的な突然変異を認めるモデルに拡張しよう．新しい世代が生まれる前に各遺伝子は突然変異をする可能性を認める．遺伝子 a が遺伝子 A に変異する確率を α、遺伝子 A が遺伝子 a に変異する確率を β とする．次世代集団の遺伝的構成は、突然変異が起きた後、上記のベルヌーイ試行に行って決定されると仮定する．ベルヌーイ試行の結果、次世代で遺伝子 a が生まれる確率は

$$p_x = \frac{x}{2N}(1-\alpha) + (1 - \frac{x}{2N})\beta$$

であり、遺伝子 A が選択される確率は

$$q_x = \frac{x}{2N}\alpha + (1 - \frac{x}{2N})(1-\beta)$$

で与えられる．推移確率は式 (10) によって与えられる．$\alpha\beta > 0$ であるとき、吸収状態は存在しない．このとき、$n \to \infty$ になるならば、X_n の確率分布は定常確率分布に収束する．

3.4 マルコフ連鎖の定常確率分布

状態空間が $\mathcal{S} = \{0, 1, \ldots, N\}$ であるとき、推移確率行列 $\mathbf{P} = \|P_{i,j}\|$ において、ある正数 k に対して $\mathbf{P}^k$ のすべての要素が正の数値であるならば、このマルコフ連鎖は正規 (regular) であるという．正規なマルコフ連鎖では、初期状態に依存しない極限確率分布が存在する．極限確率分布を $\pi(x) \geq 0, x \in \mathcal{S}$ および $\sum_x \pi(x) = 1$ であるとするとき、収束条件

$$\lim_{n \to \infty} P_{x,y}(n) = \pi(y) > 0, y = 0, 1, \ldots, N$$

が満たされる．この収束条件は、初期状態がどうであれ、長期的には、マルコフ連鎖が状態 y にある確率が $\pi(y)$ の値と近似的に等しくなることを意味する．以下の定理が成立することが知られている．

定理 3.1
$\mathbf{P}$ を状態空間 $\mathcal{S} = \{0, 1, \ldots, N\}$ 上に定義される正規なマルコフ連鎖の推移確率であるとする．このとき、極限分布 $\pi = (\pi_0, \pi_1, \ldots, \pi_N)$ は連立方程式

$$\sum_{x \in \mathcal{S}} \pi(x) P_{x,y} = \pi(y), \quad y \in \mathcal{S} \tag{11}$$

の非負の解となる．

マルコフ連鎖が正規であるならば、初期状態がどうであれ、X_n の分布は、n が無限に大きくなるにしたがって、π に収束する．この意味で、π は定常状態分布とも言われる[*4]．

例 3.6
社会学者はある家系の子孫が占める社会的階級はマルコフ連鎖で表現できると仮定している．例えば、息子の職業は親の職業に大きく依存しており、彼の祖父の職業には依存していないと仮定できる．このように定式化

[*4] この定理の証明は、Taylor and Karlin(1998),pp.204-205 を参照のこと．以下の数値例も当該書からの引用である．

されるモデルは有意であり、その推移確率は以下のように表現される．状態空間 $\mathcal{S} = \{0, 1, 2\}$ であり、*0* は下流階層、*1* は中流階層、*2* は上流階層に対応している．

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0.4 & 0.5 & 0.10 \\ 0.05 & 0.70 & 0.25 \\ 0.05 & 0.50 & 0.45 \end{bmatrix} \tag{12}$$

定常確率分布 π を求めてみよう．上記の定理から、

$$\begin{aligned} 0.4\pi(0) + 0.05\pi(1) + 0.05\pi(2) &= \pi(0) \\ 0.50\pi(0) + 0.70\pi(1) + 0.50\pi(2) &= \pi(1) \\ 0.10\pi(0) + 0.25\pi(1) + 0.45\pi(2) &= \pi(2) \\ \pi(0) + \pi(1) + \pi(2) &= 1 \end{aligned}$$

が満たされる．これを解くと、

$$\pi(0) = \frac{5}{65} \approx 0.0769, \pi(1) = \frac{5}{8} \approx 0.6250, \pi(2) = \frac{31}{104} \approx 0.2981$$

となる．ちなみに、

$$\mathbf{P}^4 = \begin{bmatrix} 0.0908 & 0.6240 & 0.2852 \\ 0.0758 & 0.6256 & 0.2986 \\ 0.0758 & 0.6240 & 0.3002 \end{bmatrix} \tag{13}$$

であり、さらに

$$\mathbf{P}^8 = \begin{bmatrix} 0.0772 & 0.6250 & 0.2978 \\ 0.0769 & 0.6250 & 0.2981 \\ 0.0769 & 0.6250 & 0.2981 \end{bmatrix} \tag{14}$$

となっている．このことから、*4* 世代後には定常状態の近くなっており、*8* 世代後にはほとんど定常状態になっていることが分かる．長期的には、人口の *62.5* %が中流階層になっている．この結論はモデルで仮定された推移確率に多くを負っている．

極限分布 π はまた異なる意味を有している．分布 $\pi(x)$ は、マルコフ連鎖 $\{X_n\}$ が状態 x にいる (単位時間当たりでの) 平均滞留時間を与えると理解できる．m 期間の長さで考えるとき、状態 x にいる時間の割合は

$$\frac{1}{m}\sum_{k=0}^{m-1} \delta_{X_k, x}$$

で与えられる．ただし、$\delta_{x,y}$ はクロネッカーの記号で

$$\delta_{x,y} = \begin{cases} 1, & y = x, \\ 0, & y \neq x \end{cases}$$

と定義される．状態 x に滞留する平均時間は

$$E[\frac{1}{m}\sum_{k=0}^{m-1} \delta_{X_k,x}|X_0 = i] = \frac{1}{m}\sum_{k=0}^{m-1} E[\delta_{X_k,x}|X_0 = i] = \frac{1}{m}\sum_{k=0}^{m-1} \Pr(X_k = x|X_0 = i) = \frac{1}{m}\sum_{k=0}^{m-1} P_{i,x}(k)$$

と計算できる．$\lim_{n\to\infty} P_{i,x}(n) = \pi(x)$ なので、

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{m}\sum_{k=0}^{m-1} P_{i,x}(k) = \pi(x)$$

が成立する．

$P_{x,y}(n) > 0$ であるような非負の整数 n が存在するならば、状態 y は x から到達可能 (accessible) であるという．二つの状態 x と y が互いに到達可能であるとき、交信できる (communicate)、あるいは同値関係 (equivalence relation) にあるという．マルコフ過程が取り得る状態は互いに到達可能な集合に分割できる．すべての状態が他の状態と互いに到達可能であるとき、つまり、すべての状態が同値関係になるとき、この連鎖は既約 (irreducible) であるという．

状態 x に対して、$P_{x,x}(n) > 0$ を満たす正の整数 n の最大公約数を、状態 x の周期 (period) といい、$d(x)$ で表現する．各状態の周期が 1 であるようなマルコフ連鎖は非周期的という．多くのマルコフ過程は非周期的である．

正の整数 n に対して、関数 $f_{x,x}(n)$ を

$$f_{x,x}(n) = \Pr(X_n = x, X_k \neq x, k = 1, 2, \ldots, n-1 | X_0 = x)$$

と定義すると、この関数は状態 x から出発して n 回目の推移で最初に元の状態 x に戻ってくる確率を表現する．明らかに、$f_{x,x}(1) = P_{x,x}$ である．n 期に状態 x にいる確率は、任意の k 期後に状態 x に戻り、さらに $n-k$ 期後に状態 x に推移する確率の総和となるので、

$$P_{x,x}(n) = \sum_{k=0}^{n} f_{x,x}(k) P_{x,x}(n-k), n \geq 1$$

が成立する．ここで、$fx, x(0) = 0$ と定義する．状態 x から出発して再び状態 x に戻ってくる確率は

$$f_{x,x} \equiv \sum_{n=0}^{\infty} f_{x,x}(n) = \lim_{N \to \infty} \sum_{n=0}^{N} f_{x,x}(n)$$

と定義できる．$f_{x,x} = 1$ であるとき、状態 x は再帰的 (recurrent) であるという．再帰的でない状態を過渡的 (transient) という．以下の定理が成立する．

定理 3.2

関係式

$$\sum_{n=1}^{\infty} P_{x,x}(n) = \infty$$

が成立することと、状態 x が再帰的であることは等価である。反対に、

$$\sum_{n=1}^{\infty} P_{x,x}(n) < \infty$$

が成立するならば、そのときにのみ、状態 x は過渡的である．

以下の定理はマルコフ連鎖の基本極限定理である．

定理 3.3

関係式

$$\lim_{n \to \infty} P_{x,x}(n) = \frac{1}{\sum_{n=0}^{\infty} n f_{x,x}(n)}$$

が成立する．また、すべての状態 y に対して、

$$\lim_{n\to\infty} P_{y,x}(n) = \lim_{n\to\infty} P_{x,x}(n)$$

が成立する．

以上の定理群の証明は Karlin and Taylor(1975) あるいは Taylor and Karlin(1998) を参照してください．

例 3.7 (1 次元ランダム・ウォーク)
状態空間が $\{0, \pm1, \pm2, \cdots\}$ で、推移確率が

$$P_{x,x+1} = p,\ P_{x,x-1} = q,\ 0 < p < 1, p + q = 1$$

となるマルコフ連鎖を考える．このマルコフ連鎖は既約で、周期は *2* である．初期状態が 0 から出発するとき、奇数回の推移では元の状態に戻れないので、

$$P_{0,0}(2n+1) = 0, n = 0, 1, \ldots,$$

である．他方、元に戻るためには同じ回数だけ左右へ推移する必要があるので、

$$P_{0,0}(2n) = \binom{2n}{n} p^n q^n = \frac{(2n)!}{n!n!} p^n q^n$$

となる．この計算に *Stirling* の公式

$$n! \approx n^{n+1/2} e^{-n} \sqrt{2\pi}$$

を用いると、

$$P_{0,0}(2n) \approx \frac{(pq)^n 2^{2n}}{\sqrt{\pi n}} = \frac{(4pq)^n}{\sqrt{\pi n}}$$

となる．明らかに、

$$pq = p(1-p) \leq 1/4$$

である．上式で等式は $p = q = 1/2$ のとき成立する．したがって、$p = 1/2$ のときのみ、

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_{0,0}(2n) = \infty$$

となる．$p = q = 1/2$ のときのみ、*1* 次元ランダム・ウォークは再帰的である．

4　飛躍型マルコフ過程

4.1　飛躍過程の定式化

状態空間 $\mathcal{S}$ が有限個もしくは可算無限個の要素からなるとする．パラメター t の集合が $T = [0, \infty)$ であるとする．システムの状態 X が初期時刻 0 で x_0 にあったとする．時刻が $\tau_1 > 0$ になった瞬間、状態が

$X(\tau_1) = x_1(\neq x_0)$ にジャンプした．時刻がさらに経過して $\tau_2(> \tau_1)$ になった瞬間、状態が $X(\tau_2) = x_2(\neq x_1)$ にジャンプした．時刻 $\tau_1, \tau_2, \cdots$ を飛躍時刻 (jump times) といい、

$$S_1 = \tau_1 - 0, \quad S_2 = \tau_2 - \tau_1, \quad S_3 = \tau_3 - \tau_2, \cdots$$

を保持時間 (holding times) という．横軸に時間をとった平面上に状態の軌跡 $X(t)$ のグラフを描くと、右連続の階段状グラフとなる．システムの状態 $X(t)$ を時間の関数で表現すると、

$$X(t) = \begin{cases} x_0, & 0 \leq t < \tau_1, \\ x_1, & \tau_1 \leq t < \tau_2, \\ x_2, & \tau_2 \leq t < \tau_3, \\ \vdots & \end{cases}$$

このように、状態 $X(t)$ のグラフが右連続な (right-continuous) 階段関数で表現できるような確率過程を飛躍過程 (jump process) という．システムの状態が x_n(有限な数 n に対して) に到達して以降ジャンプがなく、そのままの状態が維持されるとき、$\tau_{n+1} = \infty$ と表現する．このような状態 x_n を吸収状態 (吸収壁) という．システムの状態は吸収状態 (absorbing state) または非吸収状態 (non-absorbing state) のいずれかに分類される．

有限時間内に、無限回のジャンプが起こるとき、つまり、

$$\lim_{n\to\infty} \tau_n < \infty$$

ならば、$X(t)$ は爆発する (explosion) という．$X(t)$ が爆発しないならば、

$$\lim_{n\to\infty} \tau_n = \infty$$

が成立する．以下では、爆発しない確率過程だけを考察の対象とする．

システムの状態が非吸収状態ならば、時間の経過と共に状態の飛躍が起こる．次の飛躍が起こるまでの待ち時間、つまり保持時間 S_n はある確率分布に従う．さらに、飛躍が起きたとき、システムがどの状態にジャンプするかもある確率分布に従う．システムが状態 x にあるとき、経過時間が t までのうちに飛躍が起きる確率 $\Pr(\tau < t)$ を分布関数 $F_x(t)$ によって表現する．当然、$t \leq 0$ に対して、$F_x(t) = 0$ である．さらに、ジャンプが起きたとき状態 x から y に飛躍する確率、推移確率 (transition probability) を p_{xy} で表現する．遷移確率は以下の性質を満たさなければならない．

$$\sum_{y\in\mathcal{S}} p_{xy} = 1; \quad p_{xx} = 0.$$

状態 x から出発する飛躍過程はつぎのように記述できる．つまり、時間が τ_1 経過すると、状態 x から状態 $X(\tau_1) = y$ に飛躍する．ここで、保持時間 τ_1 の実現値は分布関数 F_x に従い、状態の飛躍先が y である確率は p_{xy} である．τ_1 と $X(\tau_1)$ とは独立な確率分布からの実現値であると仮定される．言い換えると、

$$P_x(\tau_1 \leq t, X(\tau_1) = y) \equiv \Pr(\tau_1 \leq t, X(\tau_1) = y \mid X(0) = x) = F_x(t)p_{xy},$$

と表現できる．ここで、$P_x(\cdots)$ は初期状態が x にあるときの確率 $\Pr(\cdots|X(0) = x)$ を表現する．今までの議論から明らかな通り、システムが状態 y に到達したとき、状態 y から始まる飛躍過程は、状態 y に到達するまでの過去の飛躍過程とは独立である．したがって、状態 x と y が非吸収状態であるとき、

$$P_x(\tau_1 \leq s, X(\tau_1) = y, \tau_2 - \tau_1 \leq t, X(\tau_2) = z) = F_x(s)p_{xy}F_y(t)p_{yz}$$

が成立する．x が吸収状態であれば、

$$p_{xy} = \delta_{xy}$$

と表現できる．ただし、δ_{xy} はクロネッカーの記号で

$$\delta_{xy} = \begin{cases} 1, & y = x, \\ 0, & y \neq x \end{cases}$$

と定義される．

初期状態 x から始まる飛躍過程が時刻 t で状態 y になる確率を $P_{x,y}(t)$ で表現する．つまり、

$$P_{x,y}(t) = P_x(X(t) = y) = \Pr(X(t) = y|X(0) = x)$$

という関係になっている．当然のことながら、条件

$$\sum_{y \in \mathcal{S}} P_{x,y}(t) = 1$$

が成立しなければならない．特に、$P_{x,y}(0) = \delta_{xy}$ である．さらに、初期状態の確率分布を $\pi_0(x) \geq 0, x \in \mathcal{S}$ とすると、

$$P(X(t) = y) = \sum_{x \in \mathcal{S}} \pi_0(x) P_{x,y}(t),$$

である．ただし、

$$\sum_{x \in \mathcal{S}} \pi_0(x) = 1.$$

システムの状態の連鎖 $\{Y_n = X(\tau_n)\}$ を飛躍連鎖 (jump chains) という．システムが状態 Y_n に到達したとき、状態 Y_n から始まる飛躍連鎖は、状態 Y_n に到達するまでの過去の歴史には依存しないので、飛躍連鎖はマルコフ過程である．しかし、飛躍過程がマルコフ過程になるためには保持時間 (holding times) がマルコフ性を満たさなければならない．つまり、飛躍過程がマルコフ過程であるためには

$$P_x(\tau_2 > t + s|\tau_1 > s) = P_x(\tau_2 - \tau_1 > t), \quad s, t \geq 0, \tag{15}$$

が満たされなければならない．分布関数の形で表現すると、

$$\frac{1 - F_x(t + s)}{1 - F_x(s)} = 1 - F_x(t)$$

となる．このマルコフ過程であるための必要十分条件を満たす確率分布は指数分布以外に存在しないことが証明できる．言い換えると、マルコフ過程であるためには、保持時間が指数分布に従うことを仮定する必要がある．この証明は、確率過程論の一般的な (中級レベル) テキストで与えられている[*5].

確率変数 $\tau : \Omega \to [0, \infty]$ がパラメター $w_x (0 \leq w_x < \infty)$ の指数分布に従うとき、$E\tau = 1/w_x$ であり、確率密度関数は

$$f_x(t) = \begin{cases} w_x e^{-w_x t}, & t \geq 0, \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

[*5] 例えば、Norris(1996) の定理 2.3.1 で証明されている．

で与えられる．明らかに、

$$P_x(\tau \geq t) = \int_t^\infty w_x e^{-w_x s} ds = e^{-w_x t}.$$

よって、

$$1 - F_x(t) = e^{-w_x t}.$$

状態 x が吸収状態であるならば、$w_x = 0$ とおく．

ここで、指数分布に関する有用な性質をあげる．$\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ は、それぞれパラメター $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ をもつ指数分布に従う、互いに独立な確率変数とする．このとき、$\min(\xi_1, \cdots, \xi_n)$ はパラメター $\alpha_1 + \cdots + \alpha_n$ をもつ指数分布に従う．そして、

$$\Pr(\xi_k = \min(\xi_1, \ldots, \xi_n)) = \frac{\alpha_k}{\alpha_1 + \cdots + \alpha_n}, \quad k = 1, 2, \ldots, n$$

が成立する．この証明は読者の練習問題とする．ヒント：$\Pr(\min(\xi_1, \ldots, \xi_n) > t)$ を計算してから、$\eta_k = \min(\xi_j : j \neq k)$ とおき、$\Pr(\xi_k = \min(\xi_1, \ldots, \xi_n)) = \Pr(\xi_k \leq \eta_k)$ を計算する．

以下では、飛躍過程は定常なマルコフ過程である (推移確率が時間に依存しない) ことを前提とする．このとき、$0 \leq t_1 \leq t_2 \cdots \leq t_n$ と $x_1, x_2, \cdots, x_n \in \mathcal{S}$ に対して、

$$\Pr(X(t_n) = x_n | X(t_1) = x_1, \ldots, X(t_{n-1}) = x_{n-1}) = P_{x_{n-1}, x_n}(t_n - t_{n-1})$$

というマルコフ性が成立する．ここで、$P_{x,y}(t) \equiv \Pr(X(t) = y | X(0) = x) \equiv P_x(X(t) = y)$ となっている．さらに、

$$\Pr(X(t_2) = x_2, \ldots, X(t_n) = x_n | X(t_1) = x_1) = P_{x_1, x_2}(t_2 - t_1) \cdots P_{x_{n-1}, x_n}(t_n - t_{n-1})$$

という関係式が成立する．よって、

$$P_x(X(t) = z, X(t+s) = y) = P_{x,z}(t) P_{z,y}(s), \quad t \geq 0, s \geq 0,$$

である．また、

$$P_{x,y}(t+s) = \sum_{z \in \mathcal{S}} P_x(X(t) = z, X(t+s) = y),$$

が成立しているので、

$$P_{x,y}(t+s) = \sum_{z \in \mathcal{S}} P_{x,z}(t) P_{z,y}(s), \quad s \geq 0, t \geq 0, \tag{16}$$

が成立している．この式をチャプマン・コルモゴロフ (Chapman-Kolmogorov) の方程式という．

4.2 マスター方程式の導出

飛躍型マルコフ過程の推移関数 (推移確率)$P_{x,y}(t)$ が以下の積分方程式で表現されることが知られている．

$$P_{x,y}(t) = \delta_{xy} e^{-w_x t} + \int_0^t w_x e^{-w_x s} \{ \sum_{z \neq x} p_{xz} P_{z,y}(t-s) \} ds, \quad t \geq 0. \tag{17}$$

この方程式が成立することを証明する．状態 x が吸収状態のときは、明らかに

$$P_{x,y}(t) = \delta_{xy}, \quad t \geq 0.$$

状態 x が吸収状態でないとする．状態 x から始まるマルコフ過程が時刻 t で状態 y にいる確率は

$$P_{x,y}(t) = P_x(X(t) = y) = P_x(\tau > t, X(t) = y) + P_x(\tau \leq t, X(t) = y)$$

と表現できる．右辺第 1 項は、時刻 t までジャンプが起こらずに、現在の状態が維持される確率を表現する．この確率は

$$P_x(\tau > t, X(t) = y) = (1 - F_x(t))\delta_{xy} = \delta_{xy}e^{-w_x t}$$

である．右辺第 2 項は、時刻 t までに（たとえば、時刻 τ で）ジャンプが起こり、x 以外の状態に推移し、残りの $t - \tau$ 時間後に状態が y に推移する確率を表す．時刻 s でジャンプが起こり、x 以外の状態 z に推移し、残りの $t - s$ 時間で状態が y に推移する確率は

$$P_x(X(s) = z, X(t) = y) = w_x e^{-w_x s} p_{xz} P_{z,y}(t - s)$$

で与えられる．よって、時刻 t までにジャンプが起こり状態 z に推移して、時刻 t に状態 y にある確率は

$$P_x(X(\tau) = z, \tau \leq t, X(t) = y) = \int_0^t w_x e^{-w_x s} p_{xz} P_{z,y}(t - s) ds.$$

したがって、

$$P_x(\tau \leq t, X(t) = y) = \int_0^t w_x e^{-w_x s} \{\sum_{z \neq x} p_{xz} P_{z,y}(t - s)\} ds$$

となる．以上のことから、(17) 式が成立することが分かる．

(17) 式で、s を $t - r$ とおくと、

$$P_{x,y}(t) = \delta_{xy}e^{-w_x t} + w_x e^{-w_x t} \int_0^t w_x e^{w_x r} \{\sum_{z \neq x} p_{xz} P_{z,y}(r)\} dr, \quad t \geq 0 \tag{18}$$

が成り立つ．(18) 式を t で微分すると、

$$\frac{dP_{x,y}(t)}{dt} = -w_x P_{x,y}(t) + w_x \sum_{z \neq x} p_{xz} P_{z,y}(t), \quad t \geq 0 \tag{19}$$

が得られる．この式で、$t \to 0$ とすると、

$$\begin{aligned}\frac{dP_{x,y}(0)}{dt} &= -w_x P_{x,y}(0) + w_x \sum_{z \neq x} p_{xz} P_{z,y}(0) \\ &= -w_x \delta_{xy} + w_x \sum_{z \neq x} p_{xz} \delta_{zy} \\ &= -w_x \delta_{xy} + w_x p_{xy}\end{aligned}$$

と変形される．ここで、新しい変数 w_{xy} を

$$w_{xy} \equiv \frac{dP_{x,y}(0)}{dt}, \quad x, y \in \mathcal{S}$$

と定義する．だから、

$$w_{xy} = \begin{cases} w_x p_{xy}, & y \neq x, \\ -w_x, & x = y \end{cases} .$$

この関係式から、

$$\sum_{y \neq x} w_{xy} = w_x = -w_{xx} \tag{20}$$

が導かれる．このように定義される $w_{xy},\ x, y \in \mathcal{S}$ を微小パラメター (infinitesimal parameters) という．この微小パラメター (限界推移率と呼ぶ) を用いると、(19) 式は

$$\frac{dP_{x,y}(t)}{dt} = \sum_z w_{xz} P_{z,y}(t), \quad t \geq 0, \tag{21}$$

となる．これを後向き方程式 (backward equation) という．

チャプマン・コルモゴロフ方程式 (16) を s について微分すると、

$$\frac{dP_{x,y}(t+s)}{dt} = \sum_z P_{x,z}(t) \frac{dP_{z,y}(s)}{ds}$$

となるので、特殊ケースとして

$$\frac{dP_{x,y}(t)}{dt} = \sum_z P_{x,z}(t) \frac{dP_{z,y}(0)}{ds}$$

つまり、

$$\frac{dP_{x,y}(t)}{dt} = \sum_z P_{x,z}(t) w_{zy}, \quad t \geq 0 \tag{22}$$

が得られる．これを前向き方程式 (forward equation) という．

コルモゴロフ方程式は統計力学ではマスター方程式 (master equation) として定式化されている．これ以降、このマスター方程式の導出について説明する．システムが時刻 t で状態 $X(t) = y$ にある確率は

$$\Pr(X(t) = y) = \sum_{z \in \mathcal{S}} \pi_0(z) P_{z,y}(t)$$

で記述される．初期状態が $X(0) = x(0)$ であるならば、

$$\Pr(X(t) = y) = \sum_{z \in \mathcal{S}} \delta_{x(0),z} P_{z,y}(t)$$

である．このとき、$\Pr(X(t) = y) = P_{x(0),y}(t)$ である．また、$P_{0,y-x}(t) = P_{x,y}(t)$ が成立する．以下では、$P_x(t)$ は $P_{0,x}(t)$ を表現する．

さて、時刻 t での限界推移率 $w_{x,y}(t)$ の概念を用いると、微小な時間内における条件付確率の変化は

$$\Pr(X(t+h) = y | X(t) = x) - \Pr(X(t) = y | X(t) = x) = w_{x,y}(t) \cdot h + o(h) \tag{23}$$

と表現できる．この関係式は限界推移率の定義と理解しても良い．つまり、

$$w_{x,y}(t) \equiv \frac{dP_{x,y}(t)}{dt}$$

である．限界推移率は単位時間当たりの推移確率とも解釈できる．y に関して、式 (23) の和をとると

$$\sum_{y\in\mathcal{S}} P_{x,y}(h) - \sum_{y\in\mathcal{S}} P_{x,y}(0) = \sum_{y\in\mathcal{S}} w_{x,y}(t)\cdot h + o(h)$$

が得られる．左辺第 1 項と第 2 項はそれぞれ 1 であるので、

$$\sum_{y\in\mathcal{S}} w_{x,y}(t) = 0$$

が成立しなければならない．したがって、

$$w_{x,x}(t) = -\sum_{y\neq x} w_{x,y}(t). \tag{24}$$

条件付確率のマルコフ性から、

$$\Pr(X(s)=y) = \sum_{x\in\mathcal{S}} \Pr(X(t)=x)\Pr(X(s)=y|X(t)=x)$$

が成立する．だから、

$$\begin{aligned}\Pr(X(t+h)=y) &= \sum_{x\in\mathcal{S}} \Pr(X(t)=x)\Pr(X(t+h)=y|X(t)=x)\\ &= \sum_{x\in\mathcal{S}} \Pr(X(t)=x)[\Pr(X(t)=y|X(t)=x) + w_{x,y}(t)\cdot h + o(h)]\\ &= \Pr(X(t)=y) + \sum_{x\in\mathcal{S}} \Pr(X(t)=x)[w_{x,y}(t)\cdot h + o(h)].\end{aligned}$$

$h\to 0$ とすると、次式が得られる．

$$\frac{dP_y(t)}{dt} = \sum_{x\in\mathcal{S}} P_x(t) w_{x,y}(t) \quad .$$

この式の右辺を

$$\sum_{x\in\mathcal{S}} P_x(t) w_{x,y}(t) = \sum_{x\neq y} P_x(t) w_{x,y}(t) + P_y(t) w_{y,y}(t)$$

と変形して、右辺第 2 項に (24) 式を用いて

$$w_{y,y}(t) = -\sum_{x\neq y} w_{y,x}(t)$$

を代入すると、

$$\frac{dP_y(t)}{dt} = \sum_{x\neq y} P_x(t) w_{x,y}(t) - \sum_{x\neq y} P_y(t) w_{y,x}(t) \tag{25}$$

が得られる．統計力学では、式 (25) をマスター方程式と言う．右辺第 1 項は、状態 y に流入する確率束を表現し、第 2 項は状態 y から流出する確率束を表現している．限界推移率が時間に依存しないならば、確率過程は時間に一様であるという．このとき、、限界推移率は時間に依存せず、一定である．すなわち

$$w_{x,y}(t) = w_{xy}, \quad t\geq 0$$

である．

4.3 ポアッソン過程

状態空間 $\mathcal{S} = \{0, 1, 2, \ldots\}$ をもつ右連続な確率過程 $(X(t))_{t\geq 0}$ は、その各保持時間がパラメター λ をもつ指数分布に従う独立な確率変数であり、その飛躍連鎖が $Y_n = X(\tau_n) = n$ で与えられるならば、パラメター λ をもつポアッソン過程であるという．

$$\tau_0 = 0,\, \tau_n = S_1 + S_2 + \cdots + S_n$$

とおくと、τ_n は n 回目のジャンプが起きる時刻を表現する．ポアッソン過程は以下の定理に見られる通り、3 通りの定義の仕方が存在する．

定理 4.1 (ポアッソン過程)
$(X(t))_{t\geq 0}$ を状態 0 から始まる右連続な整数値確率過程とする．$0 < \lambda < \infty$ とする．このとき、以下の *3* 条件は等価である．

(i). 確率過程 $(X(t))_{t\geq 0}$ の保持時間 $S_1, S_2, \cdots$ はパラメター λ をもつ互いに独立な指数分布確率変数であり、飛躍連鎖は $Y_n = n,\, n = 1, 2, \cdots$ で与えられる;

(ii). $(X(t))_{t\geq 0}$ は独立な増分をもち、h が時間で一様に 0 に収束するとき、

$$\Pr(X(t+h) - X(t) = 0) = 1 - \lambda h + o(h), \quad \Pr(X(t+h) - X(t) = 1) = \lambda h + o(h);$$

(iii). $(X(t))_{t\geq 0}$ は定常で、独立な増分をもち、任意の時刻 t に対して、$X(t)$ がパラメター λt のポアッソン分布である．

上記のいずれかの条件が満たされるとき、$(X(t))_{t\geq 0}$ は、パラメター λ をもつポアッソン過程と言われる．

この定理の (i) は、ポアッソン過程を飛躍連鎖と保持時間から定義するもので、(ii) は限界推移率を用いて定義するものである．(iii) は推移確率を利用してポアッソン過程を定義したものである[*6]．

ここで、条件 () の限界推移率を用いてポアッソン過程のマスター方程式を導出してみよう．$P_j(t) = \Pr(X(t) = j)$ とおくと、

$$\begin{aligned} P_j(t+h) &= (1 - \lambda h) P_j(t) + \lambda P_{j-1}(t) h + o(h), j \geq 1, \\ P_0(t+h) &= (1 - \lambda h) P_0(t) + o(h). \end{aligned}$$

$h \to 0$ とすると、

$$\frac{dP_j(t)}{dt} = -\lambda P_j(t) + \lambda P_{j-1}(t),\, j \geq 1, \tag{26}$$

$$\frac{dP_0(t)}{dt} = -\lambda P_0(t), \tag{27}$$

が得られる．初期条件は

$$P_j(0) = \delta_{0,j}$$

である．これらの微分方程式を解くと、

$$P_j(t) = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^j}{j!} \tag{28}$$

[*6] この定理の証明については、Norris(1997) を参照のこと．

となることが知られている[*7].

なお、ポアッソン過程の和もポアッソン過程になることは容易に証明できる．例えば、$(X_t)_{t\geq 0}$ と $(Y_t)_{t\geq 0}$ がパラメター λ と μ をもつ独立なポアッソン過程であるとき、$(X_t+Y_t)_{t\geq 0}$ はパラメター $(\lambda+\mu)$ を持つポアッソン過程である．

例 4.1

山荘の庭の鳥箱にシジュウカラとメジロがやってくる．微小時間区間 h 内に、シジュウカラが飛来する確率 $\Pr(B(t+h)-B(t)=1)$ は $\beta h+o(h)$ であり、メジロがやってくる確率 $\Pr(R(t+h)-R(t)=1)$ は $\rho h+o(h)$ である．時刻 t までに n 羽の鳥が飛来したとき、シジュウカラが k 羽である確率はどれほどか？

シジュウカラが k 羽飛んで来る確率は

$$\Pr(B(t)=k)=e^{-\beta t}(\beta t)^k/k!,$$

メジロが $n-k$ 羽飛んで来る確率は

$$\Pr(R(t)=n-k)=e^{-\rho t}(\rho t)^{n-k}/(n-k)!$$

である．鳥が時刻 t までに総計で n 羽やってくる確率はパラメター $(\beta+\rho)t$ のポアッソン分布に従うので、

$$\Pr(B(t)+R(t)=n)=e^{-(\beta+\rho)t}(\beta t+\rho t)^n/n!$$

である．n 羽の鳥が飛来したとき、シジュウカラが k 羽である確率は

$$\Pr(B(t)=k|B(t)+R(t)=n)=\Pr(B(t)=k,R(t)=n-k)/\Pr(B(t)+R(t)=n)$$

から計算できる．この式に上の関係式を代入すると、

$$\Pr(B(t)=k|B(t)+R(t)=n)=\binom{n}{k}(\frac{\beta}{\beta+\rho})^k(\frac{\rho}{\beta+\rho})^{n-k}.$$

これは、パラメターが n と $\beta/(\beta+\rho)$ の２項分布である．

ところで、ポアッソン過程では、

$$w_x=\lambda$$

$$p_{x,y}=\begin{cases}1, & y=x+1,\\ 0, & y\neq x+1\end{cases}$$

であるので、

$$w_{x,y}=\begin{cases}\lambda, & y=x+1\text{ のとき}\\ -\lambda, & y=x\text{ のとき}\\ 0, & \text{その他の場合}\end{cases}$$

[*7] 限界推移率からポアッソン過程を定義する方法について、Karlin and Taylor(1975),pp.24-25、あるいは、魚返『確率論』の第 1 章を参照のこと．同書には、ラプラス変換による微分方程式の解法も解説されている．

とおける．よって、(21) 式と (22) 式から、後向き方程式と前向き方程式は

$$\begin{aligned} \frac{dP_{x,y}(t)}{dt} &= -\lambda P_{x,y}(t) + \lambda P_{x+1,y}(t), \\ \frac{dP_{x,y}(t)}{dt} &= \lambda P_{x,y-1}(t) - \lambda P_{x,y}(t), \\ P_{x,y}(0) &= \delta_{x,y} \end{aligned} \tag{29}$$

となる．この前向きの方程式を解いてみよう[*8]．(29) 式から、

$$P_{x,y}(t) = e^{-\lambda t} P_{x,y}(0) + \lambda \int_0^t e^{-\lambda(t-s)} P_{x,y-1}(s) ds,\ t \geq 0.$$

$P_{x,y}(0) = \delta_{xy}$ だから、$y > x$ なる y に対して、

$$P_{x,y}(t) = \lambda \int_0^t e^{-\lambda(t-s)} P_{x,y-1}(s) ds,\ t \geq 0.$$

$$P_{x,x}(t) = \Pr(\tau_1 > t) = e^{-\lambda t},\ t \geq 0,$$

であるので、$y = x + 1$ のとき、

$$P_{x,x+1}(t) = \lambda \int_0^t e^{-\lambda(t-s)} e^{-\lambda s} ds = \lambda t e^{-\lambda t},\ t \geq 0.$$

$y = x + 2$ と置けば、

$$P_{x,x+2}(t) = \lambda \int_0^t e^{-\lambda(t-s)} \lambda s e^{-\lambda s} ds = \frac{(\lambda t)^2}{2} e^{-\lambda t},\ t \geq 0.$$

ここで帰納法を用いれば、

$$P_{x,y}(t) = \frac{(\lambda t)^{y-x} e^{-\lambda t}}{(y-x)!},\ y \geq x,\ t \geq 0,$$

が成立することが証明できる．

以下の条件を満たす行列 $W = (w_{ij} : i, j \in \mathcal{S})$ を状態空間 $\mathcal{S}$ 上の W 行列という．

(i). すべての $i \in \mathcal{S}$ に対して、$0 \leq -w_{ii} \leq \infty$;

(ii). すべての $i \neq j$ に対して、$w_{ij} \geq 0$;

(iii). すべての i に対して, $\sum_{j \in \mathcal{S}} w_{ij} = 1$.

明らかに、既に定義した限界推移率からなる行列は上記の条件を満たしている．ポアッソン過程の W 行列は

$$W = \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda & 0 & \cdots \\ 0 & -\lambda & \lambda & \cdots \\ \cdots & \cdots & -\lambda & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}$$

[*8] 簡単な線形常微分方程式の解法については、Appendix を参照してください．

と与えられる．

行列 W を状態空間 $\mathcal{S}$ 上の W 行列とし、

$$P(t) = e^{tW}$$

とおくならば、$(P(t) : t \geq 0)$ は以下の性質を満たすことが知られている[*9]．

(i). すべての s, t に対して、$P(s+t) = P(s)P(t)$;

(ii). $(P(t) : t \geq 0)$ は、前向き方程式

$$\frac{d}{dt}P(t) = P(t)W, P(0) = I;$$

の唯一つの解である．

(iii). $(P(t) : t \geq 0)$ は、後向き方程式

$$\frac{d}{dt}P(t) = WP(t), P(0) = I;$$

の唯一つの解である．

(iv). $k = 0, 1, 2, \ldots,$ に対して、

$$\left(\frac{d}{dt}\right)^k P(t)\Big|_{t=0} = W^k$$

が成り立つ．

ポアッソン過程の限界推移率 λ は、状態には依存せず、一定な値であることを仮定した．純出生過程 (pure birth processes) といわれる確率過程モデルは、限界推移率が状態変数に依存することを許容したモデルである．状態が x のときの出生率を λ_x, $x \geq 0$ とする．正確に表現すれば、h が一様に限りなくゼロに近づけば、

$$\begin{aligned} \Pr(X(t+h) = x | X(t) = x) &= 1 - \lambda_x h + o(h) \\ \Pr(X(t+h) = x+1 | X(t) = x) &= \lambda_x h + o(h). \end{aligned}$$

言い換えると、初期条件が $X(0) = x$ であるとき、保持時間 $S_1, S_2, \ldots$ がそれぞれパラメター $\lambda_x, \lambda_{x+1}, \ldots$ を持つ独立な指数分布の確率変数であり、飛躍連鎖が $Y_n = x + n$ で与えられる．

純出生過程のマスター方程式は、(26) 式、(27) 式から、

$$\begin{aligned} \frac{dP_y(t)}{dt} &= -\lambda_y P_y(t) + \lambda_{y-1}P_{y-1}(t),\ y \geq 1, \\ \frac{dP_0(t)}{dt} &= -\lambda_0 P_0(t), \quad P_y(0) = \delta_{xy}. \end{aligned}$$

出生過程の前向き方程式は、(29) 式から、

$$\frac{dP_{x,y}(t)}{dt} = \lambda_{y-1}P_{x,y-1}(t) - \lambda_y P_{x,y}(t), \tag{30}$$

である．ポアッソン過程の前向き方程式を解く方法と同じ方法でこの微分方式を解けば、

$$P_{x,x+1}(t) = \begin{cases} \dfrac{\lambda_x}{\lambda_{x+1} - \lambda_x}(e^{-\lambda_x t} - e^{-\lambda_{x+1} t}), & \lambda_{x+1} \neq \lambda_x, \\ \lambda_x e^{-\lambda_x t}, & \lambda_{x+1} = \lambda_x. \end{cases}$$

[*9] 証明は、Norris(1997) を参照こと．

が得られる．この導出は読者の練習問題とする．

例 4.2 (線形出生過程)
出生率が

$$\lambda_x = x\lambda, \quad x \geq 0,$$

であるケースは線形出生過程と言われる．発見者の名前にちなんでユール・ファーリ過程とも言われる．

線形出生過程のマスター方程式は、(26,27) 式から、

$$\frac{dP_y(t)}{dt} = -\lambda y P_y(t) + \lambda(y-1)P_{y-1}(t),\ y \geq 1.$$

初期条件 $x = 1$ でこの方程式を解くと、

$$P_y(t) = e^{-\lambda t}(1 - e^{-\lambda t})^{y-1}, \quad y \geq 1,$$

が得られる．この解の導出は後節 (4.6) で行う．
前向き方程式が、

$$\frac{dP_{x,y}(t)}{dt} = \lambda(y-1)P_{x,y-1}(t) - \lambda y P_{x,y}(t),$$

となることは明らかである．この方程式は帰納法によって解くこともできるが、母関数によって解くこともできる．この解が以下の式で表現されることが知られている．

$$P_{x,y}(t) = \binom{y-1}{y-x} e^{-x\lambda t}(1 - e^{-\lambda t})^{y-k}, \quad y \geq x,\ t \geq 0.$$

4.4 出生死滅過程

状態空間を $\mathcal{S} = \{0, 1, 2, \ldots, d\}$ または $\mathcal{S} = \{0, 1, 2, \ldots, \infty\}$ とする．飛躍マルコフ過程の中で、微小パラメター (限界推移率) が以下のような性質を満たす飛躍過程を出生死滅過程 (birth and death processes) という．

$$|y - x| > 1 \text{ のとき、} w_{xy} = 0 \quad .$$

状態 x から出発する出生死滅過程は一回のジャンプで状態 $x-1$ または $x+1$ にだけ推移できる．パラメター $w_{x,x+1}$ は出生率、パラメター $w_{x,x-1}$ は死滅率と呼ばれる．出生率および死滅率は

$$\lambda_x = w_{x,x+1}, \quad \mu_x = w_{x,x-1}$$

と表記される．なお、パラメター w_x とジャンプが起きたときの推移確率 p_{xy} は出生率と死滅率の関数で表現できる．
(20) 式から、

$$w_{x,x+1} + w_{x,x-1} = w_x = -w_{xx}$$

なので、

$$w_{xx} = -(\lambda_x + \mu_x), \quad w_x = \lambda_x + \mu_x.$$

遷移確率 p_{xy} は $p_{xy} = w_{xy}/w_x, x \neq y$ より計算できるので、

$$p_{xy} = \begin{cases} \frac{\mu_x}{\lambda_x+\mu_x}, & y = x-1, \\ \frac{\lambda_x}{\lambda_x+\mu_x}, & y = x+1, \\ 0, & \text{その他の場合} \end{cases} .$$

となる．ただし、$\mu_0 = 0$ であり、状態空間が有限なとき $\lambda_d = 0$ とする．状態空間が加算無限個からなるとき、爆発しないための必要十分条件を一般的に導出することは難しい．簡単な十分条件は、出生率が以下の不等式を満たすことである．すなわち、ある正の数 A, B に対して、$\lambda_x \leq A + Bx, \quad x \geq 0$ が成立することである．

出生死滅過程の限界推移率に関する仮定は以下のようにも表現できる．

(i). h が一様にゼロに収束するとき、$\Pr(X(t+h) = x+1 | X(t) = x) = \lambda_x h + o(h)$;
(ii). h が一様にゼロに収束するとき、$\Pr(X(t+h) = x-1 | X(t) = x) = \mu_x h + o(h)$;
(iii). h が一様にゼロに収束するとき、$\Pr(X(t+h) = x | X(t) = x) = 1 - (\lambda_x + \mu_x)h + o(h)$;
(iv). $\mu_0 = 0, \lambda_0 > 0,\ \mu_x, \lambda_x > 0, x \geq 1$.

出生死滅過程の W 行列 (infinitesimal generator とも言われる) は、

$$W = \begin{pmatrix} -\lambda_0 & \lambda_0 & 0 & 0 & \cdots \\ \mu_1 & -(\lambda_1+\mu_1) & \lambda_1 & 0 & \cdots \\ 0 & \mu_2 & -(\lambda_2+\mu_2) & \lambda_2 & \cdots \\ 0 & 0 & \mu_3 & -(\lambda_3+\mu_3) & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}$$

と表現できる．

出生死滅過程の後向き方程式と前向き方程式を導出してみよう[*10]．(21)(22) 式に出生率と死滅率を代入して、

$$\frac{dP_{x,y}(t)}{dt} = \mu_x P_{x-1,y}(t) - (\lambda_x + \mu_x) P_{x,y}(t) + \lambda_x P_{x+1,y}(t), \tag{31}$$

$$\frac{dP_{x,y}(t)}{dt} = \lambda_{y-1} P_{x,y-1}(t) - (\lambda_y + \mu_y) P_{x,y}(t) + \mu_{y+1} P_{x,y+1}(t). \tag{32}$$

ただし、$\lambda_{-1} = 0$ とする．出生死滅過程の後向き方程式と前向き方程式は、線形出生過程と異なり、$P_{x,y}(t)$ を $y = x+1, x+2, \cdots$ とおいて、順次求めていくという直接的な方法で解くことはできない．通常、母関数を利用した解法が採用される[*11]．

最後に、出生死滅過程のマスター方程式を導出しておこう．マスター方程式は式 (25) より

$$\frac{dP_y(t)}{dt} = P_{y-1}(t) w_{y-1,y}(t) + P_{y+1}(t) w_{y+1,y} - P_y(t) w_{y,y+1}(t) - P_y(t) w_{y,y-1}(t)$$

となる．出生率を λ、死滅率を μ と表記すると、出生死滅過程のマスター方程式は

$$\frac{dP_y(t)}{dt} = \lambda_{y-1} P_{y-1}(t) + \mu_{y+1} P_{y+1}(t) - (\lambda_y + \mu_y) P_y(t),\ y = 1, 2, \cdots, \tag{33}$$

$$\frac{dP_0(t)}{dt} = \mu_1 P_1(t) - \lambda_y P_0(t), \tag{34}$$

で与えられる．

[*10] 限界推移率を用いてコルモゴロフ方程式を導出する方法については、Taylor and Karlin(1998) を参照のこと．
[*11] 母関数による解法の詳細は、青木 (2003) を参照のこと．

例 4.3 (線形出生死滅過程:フェーラー・アレイ過程)
状態 x での出生率と死滅率が

$$\lambda_x = \lambda x, \quad \mu_x = \mu x \quad (\lambda, \mu > 0)$$

のように線形関数で与えられるとき、線形出生死滅過程と呼ばれる.

以下のようなシフト・オペレータ E を導入する.

$$Ef(n) = f(n+1), \quad E^{-1}f(n) = f(n-1).$$

この表記法を用いると、出生死滅過程のマスター方程式は

$$P_n(t) = (E-1)\mu_n P_n(t) + (E^{-1}-1)\lambda_n P_n(t), \tag{35}$$

とコンパクトに表現できる.

4.5 定常確率分布

マルコフ連鎖の節で定義したとおり、

$$\sum_x \pi(x) = 1, \pi(x) \geq 0, \tag{36}$$

$$\sum_{x\in\mathcal{S}} \pi(x) P_{x,y}(t) = \pi(y),\ y \in \mathcal{S},\ t \geq 0, \tag{37}$$

が成立するとき、π は定常確率分布 (stationary probability distribution) であるという. 定常確率分布が存在するならば、既約な飛躍マルコフ過程において、

$$\lim_{t\to\infty} P_{x,y}(t) = \pi(y), \quad y \in \mathcal{S}$$

が成立する[*12]. このとき、初期状態がどうであれ、$X(t)$ の分布は、t が無限に大きくなるにしたがって、π に収束する. 定常分布の条件式 (37) を時間で微分すると、

$$\sum_x \pi(x) \frac{dP_{x,y}(t)}{dt} = 0.$$

$t = 0$ とおくと、

$$\sum_x \pi(x) w_{xy} = 0, \quad y \in \mathcal{S} \tag{38}$$

が成り立つことが確認できる. この条件は π が定常分布であるための必要十分条件となっている.

また、$\lim_{t\to\infty} P_{x,y}(t) = \pi(y)$ であるから、定常分布は $dP_{x,y}(t)/dt = 0$ を満たす. よって、後向き方程式 (21) と前向き方程式 (22) から、定常分布では

$$\sum_z w_{xz} P_{z,y} = 0, \text{または} \quad \sum_z P_{x,z} w_{z,y} = 0$$

が成り立つ.

[*12] すべての状態が他の状態と互いに到達可能であるとき、マルコフ連鎖は既約であるという.

例 4.4 (出生死滅過程)

$X(t), t \geq 0$ を状態空間 $\{0, 1, 2, \ldots\}$ 上の既約な *(irreducible)* 出生死滅過程であるとする．状態 x での出生率を λ_x、死滅率を μ_x とする．*(38)* 式から、X の定常確率分布 $\pi(x)$ は以下の式を満たす．

$$\pi(1)\mu_1 - \pi(0)\lambda_0 = 0,$$

$$\pi(y+1)\mu_{y+1} - \pi(y)(\lambda_y + \mu_y) + \pi(y-1)\lambda_{y-1} = 0,\ y \geq 1.$$

変形して

$$\pi(y+1)\mu_{y+1} - \pi(y)\lambda_y = \pi(y)\mu_y - \pi(y-1)\lambda_{y-1},\ y \geq 1,$$

となる．漸化式の形から、明らかに、

$$\pi(y+1)\mu_{y+1} - \pi(y)\lambda_y = 0$$

が成立することがわかる．よって、

$$\pi(y+1) = \frac{\lambda_y}{\mu_{y+1}}\pi(y), \quad y \geq 0.$$

したがって、各 $x \in \mathcal{S}$ に対して

$$\pi(x) = \frac{\lambda_0 \cdots \lambda_{x-1}}{\mu_1 \cdots \mu_x}\pi(0), \quad x \geq 1.$$

ここで、

$$\pi_x = \begin{cases} 1, & x = 0, \\ \lambda_0 \cdots \lambda_{x-1}/\mu_1 \cdots \mu_x, & x \geq 1, \end{cases}$$

と定義すると、

$$\pi(x) = \pi_x \pi(0), \quad x \geq 0,$$

が得られる．出生死滅過程が正の再帰的な既約なマルコフ過程ならば、すなわち、

$$\sum_x \pi_x = \sum_{x=1}^{\infty} \frac{\lambda_0 \cdots \lambda_{x-1}}{\mu_1 \cdots \mu_x} < \infty,$$

であるならば、出生死滅過程は以下に示される唯一つの定常分布を待つ．

$$\pi(x) = \frac{\pi_x}{\sum_{y=0}^{\infty} \pi_y}, \quad x \geq 0. \tag{39}$$

状態空間が有限であるとき、すなわち、$\mathcal{S} = \{0, 1, \cdots d\}$ であるとき、出生死滅過程は正の再帰的な過程であるから、定常分布は

$$\pi(x) = \frac{\pi_x}{\sum_{y=0}^{d} \pi_y}, \quad 0 \leq x \leq d,$$

で与えられる．

マスター方程式 (25) を用いれば、

$$\sum_{x \neq y} P_x w_{x,y} = \sum_{x \neq y} P_y w_{y,x}$$

が定常分布であるための条件となる．この関係式は、フルバランス方程式と呼ばれ、状態 y に流入する確率束の大きさと状態 y から流出する確率束の大きさが同一であることを意味する．さらに、あらゆる二つの状態間の確率束がバランスするとき、

$$P_x w_{x,y} = P_y w_{y,x},\ \forall x, y \in \mathcal{S}$$

が成立する．これを詳細バランス条件という[*13]．以上のどの条件を用いて定常分布を計算すべきであるかは、対象とする確率過程の特徴に依存する．

例 4.5 (移民を伴う線形出生死滅過程：linear birth-death process with immigration)
出生率と死滅率が

$$\lambda_n = \lambda n + \alpha; \quad \mu_n = \mu n,$$

である．$\alpha > 0$ である．明らかに、$\lambda_0 = \alpha$ となっている．

移民を伴う線形成長過程のマスター方程式は、

$$\frac{P_k(t)}{dt} = (\alpha + \lambda(k-1))P_{k-1}(t) - (\alpha + (\lambda+\mu)k)P_k(t) + \mu(k+1)P_{k+1}(t), \quad k \geq 1,$$
$$\frac{P_0(t)}{dt} = \mu P_1(t) - \alpha P_0(t).$$

定常確率分布 *(均衡分布とも言う)* を求めてみよう．上の式の左辺をゼロとおくと、

$$(\alpha + \lambda(k-1))\pi_{k-1} - (\alpha + (\lambda+\mu)k)\pi_k + \mu(k+1)\pi_{k+1} = 0.$$

この式を変形すると、

$$(\alpha + \lambda(k-1))\pi_{k-1} - \mu k \pi_k = (\alpha + \lambda k)\pi_k - \mu(k+1)\pi_{k+1}$$

が得られる．左辺は状態 $k-1$ と状態 k との間の詳細つりあい条件であり、右辺は状態 k と状態 $k+1$ との間の詳細つりあい条件となっている．定常状態では、各状態間の確率束はバランスしているので、左辺と右辺は共にゼロである．したがって、

$$\frac{\pi_k}{\pi_{k-1}} = \frac{\alpha + \lambda(k-1)}{\mu k}$$

が成立する．この漸化式をとくと、

$$\pi_k = \binom{\theta + k - 1}{k} \gamma^k (1-\gamma)^\theta,$$

となる．ただし、$\theta = \alpha/\lambda$, $\gamma = \lambda/\mu$ である[*14]．

[*13] 定常状態では詳細バランス条件が成立することの証明は、van Kampen(1992),chapter 5 を参照のこと．

[*14] 導出の詳細については、青木 (2003)、第 6 章を参照のこと．

マスター方程式の解は、ある条件の下で、時間の経過と共に定常解に収束し、ただ一つの定常解だけが存在することが証明されている．この条件とは、限界推移率が時間に依存しないこと、および確率過程が既約であることを要求する．この条件が満たされているとき、以下の関数 (H 関数という) が存在することを立証できれば、マスター方程式の解は時間の経過と共に定常解に収束することが証明できる[*15]．H 関数は以下の条件を満たさなければならない．

(i). $H(t) \geq 0$ であり、$P_n(t) = \pi_n$ のとき、そのときにのみ $H = 0$ となる．
(ii). $P_n(t)$ と π_n がマスター方程式を満たすとき、$dH(t)/dt \leq 0$.
(iii). $P_n(t) = \pi_n$ のときそしてそのときにのみ、$dH(t)/dt = 0$.

この 3 条件を満たす関数として通常、

$$H(t) = \sum_{n \in \mathcal{S}} P_n(t) \ln \frac{P_n(t)}{\pi_n}、$$

が用いられる．これはいわゆるエントロピー関数であり、微分方程式の均衡点の安定性分析におけるリャープノフ関数の役割をしている．

4.6 マスター方程式の直接的解法

マスター方程式を母関数で解く手法を説明する．始めに、ユール=ファーリ過程 (線形出生過程) のマスター方程式を解いてみよう．既に説明し通り、ユール=ファーリ過程のマスター方程式は、

$$\frac{dP_j(t)}{dt} = -\lambda j P_j(t) + \lambda(j-1)P_{j-1}(t),\ j \geq 1. \tag{40}$$

で与えられる．初期条件 $P_j(0) = \delta_{1,j}$ とする．$P_j(t)$ の母関数を

$$G(z,t) = \sum_{j=0}^{\infty} P_j(t) z^j$$

と定義する．この母関数を (40) 式に代入すると、

$$\frac{\partial G}{\partial t} = \lambda z(z-1)\frac{\partial G}{\partial z}$$

が得られる．ここから、

$$\frac{dt}{1} = \frac{dz}{-\lambda z(z-1)}$$

の一般解を求めると、

$$\frac{z-1}{z} e^{\lambda t} = c$$

が得られる．ここで、c は定数である．母関数は、ある任意の関数 ϕ を介して、$G(z,t) = \phi(c)$ という関係を満たすので、

$$G(z,t) = \phi(\frac{z-1}{z} e^{\lambda t})$$

[*15] 証明は、van Kampne(1992), chapter 5 あるいは Weidlich(2000), chapter 10 を参照ください．

である[*16]．関数 ϕ の具体形を求めるために、初期条件を用いる．初期条件から、

$$G(z,0)=z$$

である．よって、

$$z=\phi(\frac{z-1}{z}).$$

したがって、

$$\phi(x)=\frac{1}{1-x}.$$

この関数形を代入して、

$$G(z,t)=\frac{ze^{-\lambda t}}{1-(1-e^{-\lambda t})z}$$

が得られる．z の冪級数に展開すると、

$$G(z,t)=e^{-\lambda t}z\sum_{j=0}^{\infty}(1-e^{-\lambda t})^j z^j, \quad |(1-e^{-\lambda t})z|<1.$$

z^j の係数を求めると、

$$P_j(t)=e^{-\lambda t}(1-e^{-\lambda t})^{j-1}, \quad j\geq 1,$$

となる．コルモゴロフ方程式も同じように解くことができる[*17]．

次に、やや複雑な移民を伴う線形出生死滅過程を取り上げてみよう．移民を伴う線形出生死滅過程のマスター方程式 (コルモゴロフの前向き方程式）から、$P_j(t)$ の母関数の方程式は、

$$\frac{\partial G}{\partial t}=\alpha(z-1)G+(\lambda z-\mu)(z-1)\frac{\partial G}{\partial z}$$

となる．この偏微分方程式を解けば、$P_j(t)$ の非定常解を求めることができる．詳細は複雑なので、省略する[*18]．

5　連続マルコフ過程

5.1　拡散過程

前節までは、マルコフ連鎖あるいは飛躍過程のように、状態空間 $\mathcal{S}$ が連続ではなく、離散的な値からなるようなマルコフ過程を説明してきた．ここでは、状態空間が連続な区間で、実数値空間の部分集合であるような一般的ケースを考える．以下では、推移確率 $P(x,t_n;y,t_{n+1})$

$$P(x,t_n;y,t_{n+1})=\Pr(X(t_{n+1})=y|X(t_n)=x),\ n=0,1,2,..$$

---

*16 偏微分方程式の特性曲線による解法については、Appendix を参照してください。なお詳細な解法に関しては、偏微分方程式のテキストを参照ください．

*17 この解法については、魚返 (1968)、第 4 章を参照のこと．

*18 母関数による解法の詳細は、青木 (2003)、第 6 章を参照のこと．

が時間差 $t_{n+1}-t_n$ のみに依存する場合、つまり定常なマルコフ過程だけを考える．

$$\Pr(y,t_{n+2}|x,t_n;z,t_{n+1}) = P(x,t_n;z,t_{n+1})P(z,t_{n+1};y,t_{n+2})$$

および

$$P(x,t_n;y,t_{n+2}) = \int \Pr(y,t_{n+2}|x,t_n;z,t_{n+1})dz$$

が成立する．よって、

$$P(x,t_n;y,t_{n+2}) = \int P(x,t_n;z,t_{n+1})P(z,t_{n+1};y,t_{n+2})dz \tag{41}$$

が得られる．これは、チャップマン・コルモゴロフの方程式と呼ばれている関係式である．

マスター方程式を導出するために、推移確率が

$$P(z,t;y,t+\tau') = (1-a_0\tau')\delta_{y,z} + \tau' W(y|z) + o(\tau') \tag{42}$$

と表現できるとする．ここで、$W(y|z)$ は単位時間当たりの、z から y への推移確率 (前節での限界推移率 $w_{z,y}$) と理解される．この関係式をチャップマン・コルモゴロフの方程式

$$P(x,t;y,t+\tau+\tau') = \int P(z,t+\tau;y,t+\tau+\tau')P(x,t;z,t+\tau)dz$$

に代入すると、

$$P(x,t;y,t+\tau+\tau') = (1-a_0\tau')P(x,t+\tau;y,t+\tau+\tau') + \tau' \int W(y|z)P(x,t;z,t+\tau)dz$$

となる．$\tau' \to 0$ とおくと、マスター方程式

$$\frac{\partial}{\partial \tau}P(x,t;y,t+\tau) = \int \{W(y|z)P(x,t;z,t+\tau) - W(z|y)P(x,t;y,t+\tau)\}dz$$

が得られる．ここで、

$$a_0(x) = \int W(z|x)dz$$

を用いた．初期状態が $X(t_0)=x_0$ ならば、

$$\Pr(X(t)=y) = \int \delta_{x_0,z}P(z,t_0;y,t)dz$$

である．

$$P(y,t) = \Pr(X(t)=y)$$

と表記することにする．この表記法を使用すれば、上記のマスター方程式はよりコンパクトに、

$$\frac{\partial}{\partial t}P(y,t) = \int \{W(y|z)P(z,t) - W(z|y)P(y,t)\}dz \tag{43}$$

と表現できることになる．

連続値マルコフ過程は拡散過程とも言われている．正確に表現すると、確率過程の状態 $X(t)$ のサンプル関数が (確率 1 で) 時間 t の連続関数になるようなマルコフ過程を拡散過程 (diffusion process) という．拡散過程は以下の条件を満たさなければいけない．

$$\text{任意の } \epsilon > 0 \text{ に対して、} \quad \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \Pr(|X(t+h) - X(t)| > \epsilon \mid X(t) = x) = 0, \forall x \in \mathcal{S}. \tag{44}$$

この条件は、非常に短い時間内では、状態変数がある値 ϵ を超えて変化する確率はほとんどゼロであることを意味する．言い換えると、式 (44) は状態のサンプル関数が時間の連続関数となることを保障している．この条件を Dynkin の条件という．物理学や生物学などでの実際の応用では、拡散過程で表現される確率過程は、期待値や分散に関しても、ある種の条件を満たすことが知られている．これらの条件とは、

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h} E[X(t+h) - X(t) \mid X(t) = x] = \mu(x,t), \tag{45}$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h} E[(X(t+h) - X(t))^2 \mid X(t) = x] = \sigma^2(x,t) \tag{46}$$

を満たす極限 μ、σ が存在することを主張するものである．式 (45) で定義される $\mu(x,t)$ はドリフト係数 (drift coefficients) あるいは微小平均 (infinitesimal mean), といわれ、式 (46) で定義される $\sigma^2(x,t)$ は拡散係数 (diffusion coefficients) あるいは微小分散 (infinitesimal variance) といわれる．こうしたことから、多くのテキストブックでは、拡散過程を以下のように定義している．確率過程 $X(t)$ が条件式 (44) を満たすマルコフ過程であり、かつ、式 (45) と (46) で定義される $\mu(x,t)$ および $\sigma^2(x,t)$ が時間の連続関数であるならば、確率過程 $X(t)$ は拡散過程である[*19]．通常は時間的一様なマルコフ過程を対象とするので、これらの係数は時間に依存しない．以下では、ドリフト係数と拡散係数は時間に依存しないと仮定する．

例 5.1 (ブラウン運動 Brownian process)
ブラウン運動 *(ウィーナー過程)*$X(t)$ は独立増分を持ち、平均値 $E[X(t+h) - X(t)]$ が *0*、分散 $Var[X(t+h) - X(t)]$ が時間の線形関数 Bh となる確率過程である．分散 $Bh = \sigma^2 h$ とおくと、

$$E[X(t+h) - X(t) \mid X(t) = x] = 0,\ E[(X(t+h) - X(t))^2 \mid X(t) = x] = \sigma^2 h$$

が得られる．明らかに *Dynkin* の条件は満たされる．したがって、ブラウン運動は状態空間を $(-\infty, +\infty)$ として、ドリフト係数 $\mu(x) = 0$、拡散係数 $\sigma^2(x) = \sigma^2$ が一定値の拡散過程である．$\mu(x) = \mu \neq 0$ であるときを含めて、一般的にブラウン運動と呼ばれている．$\mu = 0$ のとき、これに対比させて、標準ブラウン運動と呼んで区別する．

例 5.2 (オルンステイン・ウーレンベック過程　Ornstein-Uhlenbeck process)
ブラウン運動は粒子の不規則運動の位置を記述する確率過程であるので、ブラウン運動の微分は粒子の速度を表現する確率過程である．しかし、ブラウン運動のサンプル関数は微分可能ではない．ブラウン運動における粒子の速度を記述する新たなモデルがオルンステイン・ウーレンベック過程である．この確率過程では、ドリフト係数が $\mu(x) = -\alpha x$、拡散係数が $\sigma^2(x) = \sigma^2$ と与えられる．

以下の定理が成り立つことが知られている[*20]．

[*19] 詳細な定義については、Karlin and Taylor(1981) の第 15 章を参照ください．
[*20] 証明に関しては、Karlin and Taylor(1981)、pp.174-175 を参照してください．

定理 5.1
$X(t)$ を、ドリフト係数 $\mu(x)$ と拡散係数 $\sigma^2(x)$ を持つ拡散過程とする．$g(x)$ を厳密に単調な x の関数で、2 階偏導関数 $g''(x)$ が連続であるとする．このとき、$Y(t)=g[X(t)]$ で定義される確率過程 $Y(t)$ は関係式

$$\mu_Y(y)=\frac{1}{2}\sigma^2(x)g''(x)+\mu(x)g'(x),$$
$$\sigma_Y^2(y)=\sigma^2(x)[g'(x)]^2$$

で与えられるドリフト係数 μ_Y と拡散係数 σ_Y^2 を持つ拡散過程である．

この定理を用いると複雑な拡散過程のドリフト係数および拡散係数を容易に計算することができる．以下に例をあげる．

例 5.3 (幾何ブラウン運動　geometric Brawnian motion)
$X(t)$ を、ドリフト係数 μ と拡散係数 σ^2 を持つブラウン運動とする．新たな確率過程を $Y(t)=\exp\{X(t)\}$ とする．状態空間は $(0,\infty)$ である．いま任意の時間点 $t_0<t_1<\cdots<t_n$ をとると、

$$Y(t_1)/Y(t_0),Y(t_2)/Y(t_1),\ldots,Y(t_n)/Y(t_{n-1})$$

は独立で、つまり、各時点間の変化率は独立である．$y=g(x)=\exp\{x\}$ だから、$g'(x)=g''(x)=y$ である．上記の定理から、幾何ブラウン運動 $Y(t)$ のドリフト係数および拡散係数は

$$\mu_Y(y)=(\frac{1}{2}\sigma^2+\mu)y,\quad \sigma_Y^2(y)=\sigma^2y^2$$

と計算できる．この幾何ブラウン運動は、ファイナンス理論において、資産価格の変動を表現する確率過程として頻繁に使用されている．

5.2　フォッカー・プランクの方程式

すでに説明したとおり、連続マルコフ過程のチャップマン・コルモゴロフの方程式は式 (41) で与えられる．チャップマン・コルモゴロフの方程式を用いて、以下の定理が証明できる．ここで、推移確率分布関数 $F(x,\tau;y,t)$ を

$$F(x,\tau;y,t)\equiv\Pr(X(t)\le y|X(\tau)=x)$$

と定義する．前節での表記との関係は、

$$F(x,\tau;y,t)=\int_{-\infty}^{y}P(x,\tau;z,t)dz$$

となっている．定常なマルコフ過程を考えているので、

$$F(x,\tau;y,\tau+t)=\Pr(X(t)\le y|X(0)=x)=F(x,y,t)$$

が成り立つ．

定理 5.2
推移確率分布関数 $F(x,y,t)$ のもとで条件式 (44)(45)(46) が満たされ、さらに

$$\frac{\partial F(x,y,t)}{\partial x},\frac{\partial^2F(x,y,t)}{\partial x^2}$$

が (x, t) の連続関数であるとする．このとき、$F(x, y, t)$ は偏微分方程式

$$\frac{\partial}{\partial t}F(x,y,t) = \frac{1}{2}\sigma^2(x)\frac{\partial^2}{\partial x^2}F(x,y,t) + \mu(x)\frac{\partial}{\partial x}F(x,y,t) \tag{47}$$

を満たす．

この偏微分方程式をコルモゴロフの後ろ向きの方程式という．チャプマン・コルモゴロフの方程式を用いて容易に証明することができるが、ここでは証明は省略する[*21]．

また、推移確率分関数 $F(x, y, t)$ の代わりに推移確率関数 $P(y, t)$ を用いるならば、適当な条件の下で、コルモゴロフの前向きの方程式を導出することができる．これを、フォッカー・プランクの方程式と言う．van Kampen(1992) に従って、フォッカー・プランクの方程式の導出を説明する．推移率 $W(y|x)$ は飛躍の大きさ $r = y - x$ に依存するので、

$$W(x;r) \equiv W(x+r|x)$$

と表現する．この新しい表記法を用いると、マスター方程式は

$$\frac{\partial P(y,t)}{\partial t} = \int P(y-r,t)W(y-r;r)dr - \int P(y,t)W(y;-r)dr$$

となる．ここで、飛躍変化の大きさは小さく、推移率 $W(x; r)$ は r を頂点とする分布をしていることを仮定する．正確には、

$$\begin{aligned} |\ r\ | > \delta \text{ に対して, } W(x;r) \approx 0, \\ |\ \Delta x\ | < \delta \text{ に対して, } W(x+\Delta x;r) \approx W(x;r), \end{aligned}$$

となるような $\delta > 0$ が存在することを仮定する．この仮定のもとで、マスター方程式の右辺第 1 項をテイラー級数展開すると、

$$\begin{aligned} \frac{\partial P(y,t)}{\partial t} = \int P(y,t)W(y;r)dr - \int r\frac{\partial}{\partial y}\{W(y;r)P(y,t)\}dr + \frac{1}{2}\int r^2\frac{\partial^2}{\partial y^2}\{W(y;r)P(y,t)\}dr \\ - \int P(y,t)W(y;-r)dr + o(r^2), \end{aligned}$$

が得られる．ここで、r の 3 次以上の高次の項は無視される．上の式の右辺第 1 項と第 4 項は打ち消しあうので、第 2 項と第 3 項だけが残る．

$$a_\nu(y) = \int_{-\infty}^{\infty} r^\nu W(y;r)dr$$

と定義すると、以下のような偏微分方程式が得られる．

$$\frac{\partial P(y,t)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial y}\{a_1(y)P(y,t)\} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial y^2}\{a_2(y)P(y,t)\}. \tag{48}$$

ここでの導出から理解されるとおり、フォッカー・プランクの方程式は、マスター方程式の解を近似的に表現するものである．マスター方程式を解析的に解くことは一般的に非常に難しいが、フォッカー・プランクの方程式は線形偏微分方程式なので、マスター方程式に比べれば容易に解くことができる．さらに、限界推移率

[*21] 証明は、例えば、魚返『確率論』の第 6 章あるいは Karlin and Taylor(1981) の第 15 章を参照ください．

$W(x|y)$ の具体的な関数形を知らなくても、a_1, a_2 の値を計算できればフォッカー・プランクの方程式は解くことができる.

飛躍モーメント $a_1(x), a_2(x)$ は以下のようにそれぞれドリフト係数および拡散係数と一致する.

$$a_1(x) = \mu(x), \quad a_2(x) = \sigma^2(x).$$

例 5.4 (ブラウン運動)

標準ブラウン運動では、ドリフト係数 $\mu(x) = 0$、拡散係数 $\sigma^2(x) = \sigma^2$ である. 従って、ブラウン運動のフォッカー・プランクの方程式は

$$\frac{\partial P(y,t)}{\partial t} = \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} P(y,t)$$

で与えられる. この式は熱伝導の拡散方程式と言われているものと同じである. 拡散方程式の拡散定数 D は $a_2/2$ に一致する. つまり、$D = \sigma^2/2$ である. よく知られている通り、拡散方程式の解は

$$P(y,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} \exp[-\frac{y^2}{4Dt}]$$

で与えられる. これは原点で最大値をとるガウス分布 (正規分布) で、分散は

$$\langle X^2(t) \rangle = 2Dt$$

で与えられるので、時間に比例して、増大する.

5.3 確率微分方程式

液体中の粒子の運動は 2 種類の力の作用を受けて運動する. 一つは非確率的な力の作用、例えば流体の速度や外部からの圧力などによる作用である. これに対して、二つ目の力は、粒子間の衝突作用に基づく力で、ランダムな影響を受ける. 粒子間のランダムな作用は通常ブラウン運動によって記述される確率過程としてモデル化される. 時刻 t から時刻 $t + \Delta t$ における短い時間間隔 Δt での粒子の位置の変化は

$$X(t + \Delta t) - X(t) \approx \mu(x,t)\Delta t + \sigma(x,t)\Delta B(t) \tag{49}$$

と近似的に表現できる. $X(t) = x$ は時刻 t での粒子の位置、$B(t)$ は標準ブラウン運動で、$\Delta B(t) = B(t + \Delta t) - B(t)$ は時刻間隔 Δt における変化の大きさを表す.

$$E[\Delta B(t)] = 0, \ \mathrm{Var}[\Delta B(t)] = \Delta t$$

である. $\mu(x,t)$ は液体の瞬時的速度、$\sigma(x,t)^2$ は粒子の衝突に基づく瞬時的分散の大きさを表すと理解されている. 関数 $\mu(x,t)$ および $\sigma(x,t)$ がそれぞれ連続関数であると仮定できれば、$B(t)$ は確率 1 で連続なサンプル関数を持つので、確率過程 $X(t)$ はマルコフ過程である.

上記の粒子の変動を記述する関係式 (49) から、確率過程 $X(t)$ はドリフト係数 $\mu(x,t)$、拡散係数 $\sigma^2(x,t)$ を持つ拡散過程になると予想される. 事実、

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{E[\Delta X]}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t} E[\mu(x,t)\Delta t + \sigma(x,t)\Delta B(t)] = \mu(x,t)$$

である. さらに、

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{E[\Delta X^2]}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}\mathrm{Var}[\sigma(x,t)\Delta B(t)]=\sigma^2(x,t)$$

である. ブラウン運動は微分可能ではないので、極限 $\lim_{\Delta t\to 0}\Delta X/\Delta t$ を使用した微分方程式に変形できない. そこで通常、関係式 (49) の極限形として

$$dX(t)=\mu(X(t),t)dt+\sigma(X(t),t)dB(t) \tag{50}$$

という形式を用いる. これを確率微分方程式という.

例 5.5 (資産価格)

ファイナンス理論では通常資産価格の変動は確率微分方程式

$$dS=S[\mu dt+\sigma dB(t)]$$

で表現される．ここで、$S(t)$ は当該の資産の時刻 t での価格、$B(t)$ は標準ブラウン運動である．この式を

$$\frac{1}{S}dS=\mu dt+\sigma dB(t)$$

と変形して、両辺を形式的に積分すると

$$\ln\frac{S(t)}{S(0)}=\mu t+\sigma B(t)$$

が得られる．よって、確率微分方程式の解は形式的に

$$S(t)=S(0)\exp[\mu t+\sigma B(t)]$$

となる．これは資産価格が幾何ブラウン運動として表現されていることを意味する．

$Y(t)$ が確率微分方程式 (50) に従う確率変数 $X(t)$ の関数 $Y(t)=f(X(t),t)$ になっているとする．この関数 $f(X(t),t)$ の微分係数はどのように計算できるでしょうか．この計算では、標準ブラウン運動における

$$dB(t)^2\approx dt$$

という関係式が重要な役割を果たす．関数 f が十分滑らかで、テイラー級数展開が可能であるとする．このとき、

$$\begin{aligned}dY(t)=df(X(t),t)=\frac{\partial f(X(t),t)}{\partial x}dX(t)+\frac{\partial f(X(t),t)}{\partial t}dt+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f(X(t),t)}{\partial x^2}dX(t)^2\\+\frac{\partial^2 f(X(t),t)}{\partial x\partial t}dX(t)dt+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f(X(t),t)}{\partial t^2}dt^2+\cdots\end{aligned}\tag{51}$$

が成立する．また、

$$\begin{aligned}dX(t)^2&=\mu(X(t),t)^2dt^2+2\mu(X(t),t)\sigma(X(t),t)dtdB+\sigma^2(X(t),t)dB(t)^2\\&\approx\mu(X(t),t)^2dt^2+2\mu(X(t),t)\sigma(X(t),t)dtdB+\sigma^2(X(t),t)dt\end{aligned}\tag{52}$$

である．この関係式と式 (50) を式 (51) に代入すると

$$\begin{aligned}dY(t)=[\frac{\partial f(X(t),t)}{\partial x}\mu(X(t),t)+\frac{\partial f(X(t),t)}{\partial t}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f(X(t),t)}{\partial x^2}\sigma^2(X(t),t)]dt\\+\frac{\partial f(X(t),t)}{\partial x}\sigma(X(t),t)dB(t)\quad+\cdots\end{aligned}\tag{53}$$

となる．$[+\cdots]$ は、dt の 2 次以上の高次項となっているので、$dt \approx 0$ のとき、無視してもいい．式 (53) を形式的に積分すると

$$Y(\tau) - Y(0) = \int_0^\tau [\frac{\partial f(X(t),t)}{\partial x}\mu(X(t),t) + \frac{\partial f(X(t),t)}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f(X(t),t)}{\partial x^2}\sigma^2(X(t),t)]dt + \int_0^\tau \frac{\partial f(X(t),t)}{\partial x}\sigma(X(t),t)dB(t)$$

が得られる．ここで、右辺の第 2 項にある積分は通常のルベーグ (リーマン) 積分ではなく、伊藤の積分と言われる確率積分である必要がある．式 (53) は、伊藤の公式と呼ばれている確率微分の計算方法を与える公式である．明らかに、確率微分方程式を一般的に解くためには、確率積分の定義を導入しないと実行できない．複数の確率積分の概念が提案されており、確率積分の概念を詳細に説明することは、この講義ノートの範疇を超えるので、別の機会に譲ることにする．

Appendix

付録 A　常微分方程式の解法

x が一つの独立変数 t の関数であるとし、t および x, $\frac{dx}{dt}$, $\frac{d^2x}{dt^2}, \cdots$ の間にある関係式がある場合、この関係式を一般に常微分方程式という．そのうちで最も簡単なものは、t および x, $\frac{dx}{dt}$ の間に関係式

$$\phi(t, x, \frac{dx}{dt}) = 0$$

という関係が成り立つときであって、これを 1 階常微分方程式という．この式を

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x) \tag{54}$$

という形に書くことができる場合について、微分方程式の解法を説明する．解が存在するための条件についてはここでは問わないことにする．

最も簡単な 1 階微分方程式は (54) の右辺が t だけの関数となっている場合で、

$$\frac{dx}{dt} = f(t)$$

のようになるときである．両辺を t で積分すると、

$$x = \int f(t)dt + C$$

となる．もし、

$$\frac{dx}{dt} = f(x)$$

ならば、

$$t = \int \frac{dx}{f(x)} + C$$

である．また、

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\varphi(t)}{\psi(x)}$$

であるならば、

$$\int \psi(x)dx = \int \varphi(t)dt + C$$

が一般解である．

例 付録 A.1

線形微分方程式

$$\frac{dx}{dt} = -2x$$

を考えよう．この式を変形すると、

$$\frac{1}{x}dx = -2dt$$

だから

$$\ln x = -2t + \ln C$$

が得られる．よって、

$$x = Ce^{-2t}$$

が一般解となる．ただし、C は未定定数である。

$f(t)$ および $g(t)$ が与えられた関数であるとき、

$$\frac{dx}{dt} + f(t)x = g(t) \tag{55}$$

を線形 1 階微分方程式という．この式の右辺を 0 とおいた

$$\frac{dx}{dt} + f(t)x = 0$$

を (55) の同次 (斉次) 微分方程式という．この同次 (斉次) 微分方程式は

$$\frac{dx}{dt} = -f(t)x$$

と書き直せるので、その一般解は

$$x = C\exp\{-\int_{t_0}^{t} f(r)dr\}$$

となる．ここで、C は積分定数である．同次でない微分方程式 (55) を解くには、C を t の関数と仮定して、すなわち、$x = C(t)\exp\{-\int_{t_0}^{t} f(r)dr\}$ を (55) に代入して、関数 $C(t)$ を求めればよい．この手続きを行うと最終的に、一般解として

$$x = \exp\{-\int_{t_0}^{t} f(r)dr\}[\int_{t_0}^{t} \exp\{\int_{t_0}^{r} f(u)du\}g(r)dr + x_0] \tag{56}$$

が得られる．ここで、x_0 は $t=t_0$ のときの値であり、x の初期値である．初期値を定めれば微分方程式の解は唯一つに定まる．これを初期条件を与えるという．(56) は変形すると、

$$x = x_0 \exp\{-\int_{t_0}^{t} f(r)dr\} + \exp\{-\int_{t_0}^{t} f(r)dr\} \int_{t_0}^{t} \exp\{\int_{t_0}^{r} f(u)du\} g(r)dr$$

となる．

確率過程論で登場するコルモゴロフ方程式の解法について以下の公式が便利である．

例 付録 A.2

以下のような常微分方程式を考える．

$$\frac{dx}{dt} = -\lambda x + g(t)$$

$t=0$ での初期値を $x(0)=x_0$ とする．この微分方程式の解は、上記の結果、式 *(56)* から、

$$x(t) = x_0 e^{-\lambda t} + e^{-\lambda t} \int_0^t e^{\lambda r} g(r)dr$$

となることは自明である．

例 付録 A.3

以下のような線形常微分方程式の解を考える．

$$\frac{dx}{dt} = \lambda x,$$
$$\frac{dy}{dt} = x + \lambda y.$$

$t=0$ での初期値を $x=x_0, y=y_0$ とする．第 *1* 番目の式から、x が

$$x(t) = x_0 e^{\lambda t}$$

となることは容易に分かる．*2* 番目の式から

$$y(t) = y_0 e^{\lambda t} + e^{\lambda t} \int_0^t e^{-\lambda r} x(r)dr$$

となる．ここで、

$$e^{\lambda t} \int_0^t e^{-\lambda r} x(r)dr = e^{\lambda t} \int_0^t x_0 dr = x_0 t e^{\lambda t}$$

であるから、

$$y(t) = y_0 e^{\lambda t} + x_0 t e^{\lambda t}$$

となる．

付録 B　偏微分方程式の解法

線形偏微分方程式の一般解を求める方法の中で、特性曲線を用いた解法を説明する．z が x および y の関数であるとき、

$$\frac{\partial z}{\partial x} = p,\ \frac{\partial z}{\partial y} = q$$

とおくならば、x と y および p, q の間に関係式

$$f(x, y, z, p, q) = 0$$

が成立するとき、この関係式を一階偏微分方程式という．この式を満足する $z = F(x, y)$ という関数があれば、これを偏微分方程式の解という。$z = F(x, y)$ は一つの曲面を表すので、積分曲面とも言う．一階の常微分方程式の一般解では、一つの未定定数を含む．他方、一階の偏微分方程式の解では、一つの未定関数を含む．常微分方程式での未定定数は初期条件によって定まる．同様に、偏微分方程式の一般解に含まれる未定関数も初期条件によって定まる．例えば、

$$p + q = 0$$

という偏微分方程式の解は、

$$z = F(x - y)$$

という任意の関数 F で表現できる．$y = 0$ のとき $xz = a$ であるという初期条件を与えれば、この関数形は

$$z = \frac{a}{x - y}$$

と具体的に定められる．

次に偏微分方程式と解との関係を明らかにするために、最初に積分曲線を与えるところから始めてみよう．原点を通る直線 OG と平行な直線がある曲線 D に沿って描くときできる曲面は一般に筒面である．OG の方程式を

$$az - cx = 0,\ bz - cy = 0$$

とする．この直線に平行な直線群は

$$az - cx = C_1,\ bz - cy = C_2$$

と表現できる．ここで、定数 C_1, C_2 の値は任意である．もしこれらの直線群が曲線 D と常に交わるためには C_1 と C_2 はまったくの任意ではありえない．言い換えると、これらの間にはある種の関係が成立していなければいけない．すなわち、

$$F(C_1, C_2) = 0$$

のように関数関係をしている．この関係式から

$$F(az - cx, bz - cy) = 0$$

が成り立つ．この関係式から

$$\frac{\partial F}{\partial x}+p\frac{\partial F}{\partial z}=0,\ \frac{\partial F}{\partial y}+q\frac{\partial F}{\partial z}=0$$

を計算すると、

$$(ap-c)F_1+bpF_2=0,\ aqF_1+(bq-c)F_2=0$$

が得られる．ここで、F_1 は第 1 番目の変数による関数 F の偏微分係数、F_2 は第 2 番目の変数による偏微分係数である．この式から偏微分係数 F_1, F_2 を消去すると、

$$ap+bq=c$$

という偏微分方程式が得られる．これが関数 F が満たす偏微分方程式となる．

一般に、線形一階偏微分方程式は

$$f(x,y,z)\frac{\partial z}{\partial x}+g(x,y,z)\frac{\partial z}{\partial y}=h(x,y,z) \tag{57}$$

と表現できる．任意の点 $P(x,y,z)$ をとり、この点 P から始まる一つのベクトル PQ を考える．このベクトル PQ を $(f(x,y,z),g(x,y,z),h(x.y,z))$ とする．点 P を通る積分曲面を S として、その方程式を $z=F(x,y)$ とする．P における曲面 S の法線ベクトル PN は $(p,q,-1)$ である．式 (57) から、$fp+gq-h=0$ であるから、ベクトル PQ とベクトル PN は直交している．ベクトル PQ は積分曲面 S の接線ベクトルであるから、力線の微分方程式は

$$\frac{dx}{f(x,y,z)}=\frac{dy}{g(x,y,z)}=\frac{dz}{h(x,y,z)} \tag{58}$$

で与えられる．この連立常微分方程式を解いて、

$$y=\phi(x,C_1,C_2),\ z=\psi(x,C_1,C_2)$$

が得られたとする．あるいはこれを変形できて

$$u(x,y,z)=C_1,\ v(x,y,z)=C_2$$

と表現できたとする．これが力線の方程式である．これらの曲線の移動によって描かれる曲面の方程式は

$$F(u,v)=0 \tag{59}$$

である．F は任意の関数であって、初期条件によって定められる．このように、偏微分方程式 (57) を解くには、これに対応する常微分方程式 (58) を解き、これから初期条件を用いて、関数関係 $F(u,v)=0$ を見出せばよい．(58) の解が描く曲線を特性曲線という．一般解 (59) を変形して、

$$u=\phi(v)$$

と書くこともできる．ここで、ϕ は任意の関数である．

例 付録 B.1

限界推移率が $w_{k,k+1} = \alpha + \lambda k$ で与えられる移民を伴う線形出生過程の確率母関数 $G(z,t)$ は

$$\frac{\partial G}{\partial t} - \lambda z(z-1)\frac{\partial G}{\partial z} = \alpha(z-1)G$$

という偏微分方程式を満たさなければいけない．この偏微分方程式では、(t,z) が独立変数で、G が (t,z) の関数となっている．偏微分方程式 (57) で

$$f = 1,\ g = -\lambda z(z-1),\ h = \alpha(z-1)G$$

となっているので、特性曲線の微分方程式 (58) は

$$\frac{dt}{1} = \frac{dz}{-\lambda z(z-1)} = \frac{dG}{\alpha(z-1)}$$

となる．この式の第 *2* 等式から

$$\ln G(z,t) = -\frac{\alpha}{\lambda}\ln z + \ln C_1$$

が得られる．変形すると

$$\ln[G(z,t)z^{\alpha/\lambda}] = \ln C_1$$

である．第 *1* 番目の等式から

$$\frac{z}{z-1} = C_2 e^{\lambda t}$$

が得られる．未定定数 C_1, C_2 は任意の関数 ϕ で

$$C_1 = \phi(C_2)$$

のように関係付けられるので、

$$G(z,t)z^{\alpha/\lambda} = \phi(\frac{z}{z-1}e^{-\lambda t})$$

と書いてもよい．よって、偏微分方程式の一般解 *(*確率母関数*)* は

$$G(z,t) = z^{-\alpha/\lambda}\phi(\frac{z}{z-1}e^{-\lambda t})$$

という関数形として得られる．初期条件を与えれば、関数形が特定できる．

参考文献

確率過程論の代表的なテキストを以下にあげる．入門用のテキストは (1),(5),(6) である．(6) は確率論というタイトルになっているが、内容は確率過程論である．

(1). Paul G. Hoel, Sidney C. Port, and Charles J. Stone(1972), *Introduction to Stochastic Processes*, Houghton Mifflin.

(2). Samuel Karlin and Howard M. Taylor(1975), *A First Course in Stochastic Processes*, Academic Press.

(3). Samuel Karlin and Howard M. Taylor(1981), *A Seccond Course in Stochastic Processes*, Academic Press.
(4). J.R.Norris(1997), *Markov Chains*, Cambridge University Press.
(5). Howard M. Taylor and Samuel Karlin(1998), *An Introduction to Stochastic Modeling*, Academic Press.
(6). 魚返　正 (1968),『確率論』朝倉書店.
(7). N. G. Van Kampen(1992), *Stochastic Processes in Physics and Chemistry*, North-Holland.

確率力学系モデルの典型的な専門書を以下にあげる．(3) が入門用のテキストと言える．それ以外は相当高度な分析手法を要求しており、初学者向きではない.

(1). Masanao Aoki(1996), *New Approaches to Macroeconomic Modeling*,Cambridge University Press.
(2). Masanao Aoki(202), *Modeling Aggregate Behavior and Fluctuations in Economics*, Cambridge University Press.
(3). 青木　正直 (2003)、『異質的エージェントの確率動学入門』、共立出版.
(4). Wolfgang Weidlich and Gunter Haag(1983), *Concepts and Models of a Quantitative Sociology*,Springer-Verlag.
(5). Wolfgang Weidlich(2000), *Sociodynamics:A Systematic Approach to Mathematical Modelling in the Social Sciences*, Dover Publication.